Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica

Anéis Quocientes Clássicos e Localização Não Comutativa

Dirceu Bagio
Orientador: Prof. Dr. Oscar Ricardo Janesch

Florianópolis
Março de 2000

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica

Anéis Quocientes Clássicos e Localização Não Comutativa

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Álgebra.

Dirceu Bagio
Florianópolis
Março de 2000

Anéis Quocientes Clássicos e Localização Não Comutativa

por

Dirceu Bagio

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre", Área de Concentração em Álgebra, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica.

Celso Melchíades Dória
Coordenador

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Oscar Ricardo Janesch (UFSC-Orientador)

Prof. Dr. Antônio José Engler (UNICAMP)

Prof. Dra. Albertina Zatelli (UFSC)

Prof. Dr. Andrzej Solecki (UFSC)

Florianópolis, abril de 2000.

A Deus
Ao meu avô, Daniel Marchi

Agradecimentos

Agradeço a minha família e a minha namorada Elisabeth, pelo incentivo dado em todos os momentos.

Aos colegas de graduação e pós-graduação Adriana, Airton, Andresa, Claiton, Christian, Daniel, Danilo, Edson, Fabiana, Fábio, Graziela, Ivanete, Janice, Maria Inez, Milton, Oswaldo, Patricia, Rafael, Sandro e Sergio meu agradecimento pela agradável companhia e amizade. Sou grato ao colega Rafael pelo suporte em LaTeX, editor usado na compilação deste trabalho.

Agradeço ao CNPQ (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Técnológico) pelo auxílio financeiro recebido.

Meu profundo agradecimento ao meu orientador Oscar Ricardo Janesch pelo apoio a mim concedido.

Resumo

Este trabalho é um estudo sobre a construção de anéis quocientes clássicos. Apresentamos a construção do anel quociente clássico para um anel comutativo e para um domínio de Ore. Faz-se uma construção geral para módulos quocientes usando um radical de torção. Trabalhando com o radical de torção Z, generalizamos a construção feita para o anel comutativo e obtemos propriedades análogas ao do caso comutativo. Demonstramos também os teoremas de Goldie, que fornecem condições necessárias e suficientes para a existência de um anel quociente clássico artiniano simples para um anel com unidade.

Sumário

Introdução

Neste trabalho faremos um estudo sobre a construção de anéis quocientes clássicos para um anel com unidade R.

Quando R é um domínio comutativo, seu anel quociente clássico é o corpo de frações de R, cuja construção através de classes de equivalência é bem conhecida. Se R é um anel comutativo, podemos obter seu anel quociente clássico através da localização comutativa de R segundo um sistema multiplicativo S.

Tanto a construção do corpo de frações quanto a localização comutativa dependem essencialmente da comutatividade do anel. Desta forma, as construções acima não se aplicam quando o anel não é comutativo. Mais do que isso, nem todo domínio não comutativo possui um anel quociente clássico.

Por volta de 1930, O. Ore apresentou uma condição necessária e suficiente para a existência de um anel quociente para um domínio não comutativo, além de construí-lo por meio de classes de equivalência. A construção de Ore generaliza a construção do corpo de fracões, porém não se aplica para um anel qualquer com unidade. Em 1957, Grothendieck publicou um estudo sobre a construção de categorias quocientes que serviu de base para os trabalhos de P. Gabriel, R. E. Johnson, Y. Utumi, A. W. Goldie, J. Lambek, etc. Baseados nos trabalhos de Lambek, faremos no terceiro capítulo deste trabalho uma construção geral para módulos quocientes utilizando um funtor associado a uma teoria de torção dada.

Um funtor localização S^o sobre anéis não singulares, generalizando a localização comutativa e mantendo várias propriedades, foi definido por Gabriel em 1962. Mostraremos que o funtor S^o é um caso particular da construção do capítulo 3. A partir do funtor localização S^o estudaremos os casos nos quais é possível obter um anel quociente clássico para um anel com unidade R e de tal forma que este anel quociente clássico possua propriedades análogas ao anel quociente clássico obtido através da localização comutativa. Encerramos o trabalho aplicando os resultados obtidos através do funtor localização S^o para demonstrar os teoremas de Goldie.

Neste trabalho, os anéis são anéis com unidade e os homomorfismo de anéis levam unidade em unidade. Se R é um anel, denotaremos por R^* o conjunto dos elementos regulares de R. Não assumimos que domínios são comutativos.

Capítulo 1

Domínio de Ore e Localização Comutativa

Neste capítulo definimos anel quociente clássico, verificamos algumas propriedades e apresentamos uma condição necessária e suficiente para sua existência. Na segunda seção fazemos a construção do anel quociente clássico para um domínio de Ore, e observamos que tal construção não se aplica a um anel qualquer, mesmo que seja comutativo. Nas duas seções finais, fazemos a construção de anéis e módulos de frações sobre um anel comutativo, usando o processo de localização. Verificamos que o anel de frações é o anel quociente clássico, mas sua construção depende essencialmente da comutatividade. Terminamos listando propriedades da localização comutativa no sistema $S = R^*$, cujos análogos pretendemos obter para a localização não comutativa, que será definida no capítulo 4.

1.1 Anel Quociente Clássico

Dado um domínio comutativo D, definimos em $D \times D^*$, a relação de equivalência

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc \ .$$

Denotando a classe de (a, b) por $\frac{a}{b}$ temos $\frac{a}{b} = \{(x, y) \in D \times D^* \ / \ ay = bx\}$. O conjunto $K = \frac{D \times D^*}{\sim} = \left\{ \frac{a}{b} \ / \ a \in D, b \in D^* \right\}$ é um corpo com as operações:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad \text{e} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \ ,$$

chamado de corpo de frações de D. Além disso, $D' = \left\{ \frac{a}{1} \ / \ a \in D \right\}$ é um subdomínio de K, isomorfo a D com a aplicação dada por

$$\begin{aligned} \varphi : \quad D &\longrightarrow D' \\ a &\longmapsto \tfrac{a}{1} \end{aligned}.$$

Identificando os elementos de D com suas imagens por φ temos que D é um subanel de K e todo elemento não nulo de D tem inverso em K.

A construção acima motiva a definição a seguir.

Definição 1.1.1. *Um anel Q é um anel quociente clássico à direita para R quando:*

i. R é subanel de Q.

ii. Todo elemento regular de R tem inverso em Q.

iii. $Q = \{ab^{-1} \ / \ a \in R, b \in R^*\}$.

Um anel quociente clássico à esquerda para R é definido analogamente, isto é, trocando (iii) por $Q = \{a^{-1}b \ / \ b \in R, a \in R^*\}$.

Lema 1.1.1. *Sejam que Q um anel quociente clássico à direita (ou à esquerda) para R e $i : R \longrightarrow Q$ o homomorfismo inclusão . Se $\psi : R \longrightarrow Q_1$ é um homomorfismo de anéis tal que $\psi(r)$ é inversível para cada $r \in R^*$, então existe um único homomorfismo $\sigma : Q \longrightarrow Q_1$ tal que $\sigma \circ i = \psi$.*

Demonstração: Defina $\sigma : Q \longrightarrow Q_1$, por $\sigma(ab^{-1}) = \psi(a)\psi(b)^{-1}$. Vamos verificar que σ está bem definida. Sejam $ab^{-1} = cd^{-1} \in Q$. Como $d^{-1} \in Q$ e $b \in Q$ temos que $d^{-1}b \in Q$ e então $d^{-1}b = eu^{-1}$, com $e \in R$, $u \in R^*$. Segue que $a = ceu^{-1}$ e $de = bu$ donde $\psi(e) = \psi(d^{-1})\psi(b)\psi(u)$. Assim $\sigma(ab^{-1}) = \psi(a)\psi(b)^{-1} = \psi(c)\psi(e)\psi(u)^{-1}\psi(b)^{-1} = \psi(c)\psi(d)^{-1} = \sigma(cd^{-1})$. Para ver que σ é homomorfismo, considere $ab^{-1}, cd^{-1} \in Q$ e escreva $b^{-1}c = eu^{-1}$ donde $\psi(c)\psi(u) = \psi(b)\psi(e)$. Assim $\sigma(ab^{-1}cd^{-1}) = \sigma(ae(du)^{-1}) = \psi(a)\psi(e)\psi(u)^{-1}\psi(d^{-1}) = \psi(a)\psi(b)^{-1}\psi(c)\psi(d)^{-1} = \sigma(ab^{-1})\sigma(cd^{-1})$. Para a soma $ab^{-1} + cd^{-1} = mn^{-1}$, escrevemos $m = ab^{-1}n + cd^{-1}n$ e então $\sigma(ab^{-1}+cd^{-1}) = \psi(m)\psi(n)^{-1} = \psi(a)\psi(b)^{-1}\psi(n)\psi(n)^{-1}+\psi(c)\psi(d^{-1})\psi(n)\psi(n)^{-1} = \sigma(ab^{-1}) + \sigma(cd^{-1})$. A igualdade $\sigma \circ i = \psi$ é imediato. Considerando $\sigma_1 : Q \longrightarrow Q_1$ um homomorfismo de anéis tal que $\sigma_1 \circ i = \psi$, vem que, $\sigma_1(ab^{-1}) = \sigma_1(a)\sigma_1(b)^{-1} = \psi(a)\psi(b)^{-1} = \sigma(ab^{-1})$.

□

Corolário 1.1.1. *Se Q_1 e Q_2 são anéis quocientes clássicos à direita para R então $Q_1 \simeq Q_2$.*

Demonstração: Sejam $i_1 : R \longrightarrow Q_1$ e $i_2 : R \longrightarrow Q_2$ as inclusões. Do lema anterior obtemos únicos homomorfismos $\sigma : Q_1 \longrightarrow Q_2$ e $\varphi : Q_2 \longrightarrow Q_1$ tais que $\sigma \circ i_1 = i_2$ e $\varphi \circ i_2 = i_1$. Desde que $\sigma \circ \varphi \circ i_2 = i_2$ e $Id_{Q_2} \circ i_2 = i_2$ temos que $\sigma \circ \varphi = Id_{Q_2}$. Analogamente, $\varphi \circ \sigma = Id_{Q_1}$.

□

O corolário acima nos garante que o anel quociente clássico à direita para R é único, a menos de isomorfismo. Assim, falaremos que Q é o anel quociente à direita para R.

Corolário 1.1.2. *Se R tem um anel quociente clássico à direita e um anel quociente clássico à esquerda então eles são isomorfos.*

Demonstração: Análoga ao corolário anterior.

□

Com base no resultado acima, quando Q é um anel quociente clássico à direita e à esquerda para R, dizemos que Q é um anel quociente clássico para R.

Note que se R é um anel de divisão então R é seu próprio anel quociente clássico.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, temos que $\mathbb{Z}_n$ é seu próprio anel quociente clássico. Isso pode ser verificado diretamente, ou como um caso particular da seguinte proposição.

Proposição 1.1.1. *Se R é anel artiniano à direita então R é seu próprio anel quociente clássico à direita.*

Demonstração: É suficiente provar que todo elemento regular de R tem inverso em R. Seja então $x \in R^*$ e considere a cadeia de ideais à direita $xR \supseteq x^2R \supseteq \ldots$. Por hipótese, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n = x^{n+1}r$ para algum $r \in R$. Assim $xr = 1$, isto é, x tem inverso à direita em R. Para verificar que x tem inverso à esquerda, mostraremos que o endomorfismo $\varphi : R_R \longrightarrow R_R$ dado por $\varphi(a) = xa$ é isomorfismo. Claro que φ é sobrejetor, pois $xr = 1$. Considere a cadeia de ideais à direita

$$\mathrm{Ker}(\varphi) \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi^2) \subseteq \ldots$$

Sendo R artiniano à direita, segue de [10] pg.138, que R é anel noetheriano à direita, e então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{Ker}(\varphi^m) = \mathrm{Ker}(\varphi^{m+1})$. Seja $u \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Como φ^m é sobrejetora, $u = \varphi^m(v)$, para algum $v \in R$. Daí, $0 = \varphi(u) = \varphi^{m+1}(v)$ e segue que $v \in \mathrm{Ker}(\varphi^{m+1}) = \mathrm{Ker}(\varphi^m)$, isto é, $u = \varphi^m(v) = 0$. Logo φ é injetiva, e como $\varphi(1 - rx) = 0$ devemos ter $1 = rx$.

$\square$

Vale o análogo do resultado acima para anéis artinianos à esquerda.

É claro que o corpo de frações de um domínio comutativo D é o anel quociente clássico para D. Porém a construção do corpo de frações não pode ser seguida para obter uma construção geral. De fato, se R é um domínio não comutativo, a relação definida na construção do corpo de frações, em geral, não é de equivalência. Tome, por exemplo, o anel de divisão dos quatérnios reais. Note que $(i, -j) \sim (i, j)$ e $(i, j) \sim (k, 1)$, mas $(i, -j) \not\sim (k, 1)$. Por outro lado, se R é um anel comutativo que possui divisores de zero, a relação também não é de equivalência. Considere o anel comutativo $\mathbb{Z}_8$. Observe que $(\overline{1}, \overline{2}) \sim (\overline{6}, \overline{4})$ e $(\overline{6}, \overline{4}) \sim (\overline{3}, \overline{2})$, mas $(\overline{1}, \overline{2}) \not\sim (\overline{3}, \overline{2})$.

Não é verdade, em geral, que um anel com unidade R possui anel quociente clássico à direita ou à esquerda, conforme [10] pg.96. Em 1931, 0. Ore apresentou em [13] uma condição necessária e suficiente para a existência de um anel quociente clássico à direita para um anel com unidade R. Esta condição é conhecida como condição de Ore à direita.

Proposição 1.1.2 (Condição de Ore à Direita). *O anel com unidade R possui um anel quociente clássico à direita se, e somente se, dados $a \in R$ e $x \in R^*$ existem $b \in R$ e $y \in R^*$ tais que $ay = xb$.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Sejam Q um anel quociente clássico à direita para R, $Q = \{by^{-1} \ / \ b \in R, y \in R^*\}$, $a \in R$, $b \in R^*$. Como $b^{-1}a \in Q$ existem $a_1 \in R$ e $b_1 \in R^*$ tais que $b^{-1}a = a_1 b_1^{-1}$, ou seja, $ab_1 = ba_1$.
($\Leftarrow$) Inicialmente provemos que:

Afirmação 1. Se $ab_1 = ba_1$, sendo $a, b, a_1 \in R^*$ e $b_1 \in R$ então $b_1 \in R^*$.

Suponhamos que $b_1 x = 0$. Então $ab_1 x = 0$, ou seja, $ba_1 x = 0$. Como $ba_1 \in R^*$ temos que $x = 0$. Vamos verificar que se $xb_1 = 0$ também temos $x = 0$. Por hipótese, existem $a_2 \in R$ e $b_2 \in R^*$ tais que $ab_2 = ba_2$ e existem $c \in R^*$, $d \in R$ tais que $a_2 c = a_1 d$. Conseqüentemente $ba_2 c = ab_2 c$ e $ba_2 c = ba_1 d = ab_1 d$, ou seja, $ab_2 c = ab_1 d$. Então $a(b_2 c - b_1 d) = 0$ e como $a \in R^*$, $b_2 c = b_1 d$. Assim, dado $x \in R$ tal que $xb_1 = 0$ temos $0 = xb_1 = xb_1 d = xb_2 c$. Mas $b_2 c \in R^*$, e então $x = 0$.

Definimos em $R \times R^*$ a relação: $(a, b) \sim (c, d)$ se, e somente se, a seguinte implicação

é satisfeita: (*) Se existem $x, y \in R^*$ tais que $bx = dy$ então $ax = cy$.
Provemos agora que:

Afirmação 2. Dado $(a, b) \in R \times R^*$, se (*) é válido para $x, y \in R^*$ então é válido para qualquer $x_1, y_1 \in R^*$.

Usando a hipótese, existem $g \in R^*$ e $g_1 \in R$ tais que $yg = y_1 g_1$. Pela afirmação anterior, $g_1 \in R^*$. Mas estamos assumindo que $bx_1 = dy_1$ e $bx = dy$. Assim $bx_1 g_1 = dy_1 g_1 = dyg = bxg$, ou seja, $x_1 g_1 = xg$ e então $ax_1 g_1 = axg = cyg = cy_1 g_1$. Portanto $ax_1 = cy_1$.

Disto segue que $\sim$ é uma relação de equivalência em $R \times R^*$. Denotaremos a classe (a, b) por $\frac{a}{b}$ e o conjunto das classes por Q. Dados $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in Q$, existem $x, y \in R^*$ tais que $m = bx = dy$ e definimos $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ax+cy}{m}$. Note que a definição acima independe de m. De fato, se $m' = bx' = dy'$ para $x', y' \in R^*$ e se $mu = mv'$ para $u, v \in R^*$, então $bxu = bx'v$, isto é, $xu = x'v$. Similarmente $yu = y'v$, e daí, $(ax+cy)u = (ax'+cy')v$. Assim $\frac{(ax+cy)}{m} = \frac{(ax'+cy')}{m'}$. Notemos também que a definição de soma apresentada independe da escolha do representante de classe. Se $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, então existem $z, x', y' \in R^*$ tais que $m' = bx' = dy' = b'z$ e então $ax' = a'z$. Como vimos, a definição dada independe de m, isto é, $t = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ax+cy}{m} = \frac{ax'+cy'}{m'}$. Assim $t = \frac{a'z+cy'}{m'} = \frac{a'}{b'} + \frac{c}{d}$. Similarmente a definição de soma, escolhemos $y_1 \in R^*$ e $x_1 \in R$ tais que $m = bx_1 = cy_1$ e definimos $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ax_1}{dy_1}$. Como antes, verifica-se que esta definição independe da escolha de x_1 e y_1 bem como da escolha do representante da classe. Omitiremos os detalhes da verificação de que $(Q, +, \cdot)$ é anel. Assumindo isto, vemos que $\varphi : R \longrightarrow Q$, $\varphi(a) = \frac{a}{1} = \frac{ab}{b}$ $\forall b \in R^*$ é um monomorfismo de anéis. Além disso, se $a \in R^*$ então $\frac{a}{1}$ é inversível em Q e $\left(\frac{a}{1}\right)^{-1} = \frac{1}{a}$. Finalmente, note que se $\frac{a}{b} \in Q$ então $\frac{a}{b} = \left(\frac{a}{1}\right)\left(\frac{b}{1}\right)^{-1}$. Logo Q é um anel quociente clássico à direita para R.

□

De forma análoga a proposição anterior, temos a condição de Ore à esquerda: o anel com unidade R possui anel quociente clássico à esquerda se, e somente se, dados $a \in R$ e $x \in R^*$ existem $b \in R$ e $y \in R^*$ tais que $ya = bx$.

O. Ore apresentou ainda, uma construção do anel quociente clássico para uma classe de domínios não necessariamente comutativos. Estes domínios são atualmente chamados domínios de Ore, e seus anéis quocientes clássicos são anéis de divisão.

1.2 Domínio de Ore

Definição 1.2.1. *Um domínio de Ore à direita é um domínio R tal que quaisquer dois elementos não nulos de R tem um múltiplo não nulo à direita em comum, isto é, $aR \cap bR \neq 0$ para todos $a, b \in R^*$.*

Analogamente definimos domínio de Ore à esquerda. No entanto, nem todo domínio de Ore à direita é um domínio de Ore à esquerda, como pode ser visto em [10], pg 101.
Exemplos:

(a) Os anéis de divisão são domínios de Ore à direta e à esquerda.

(b) Todo domínio comutativo é um domínio de Ore à direita e à esquerda.

A partir do domínio de Ore à direita R vamos construir um anel de divisão D, que será o anel quociente clássico à direita de R.

Consideremos em $X = R \times R^*$ a relação dada por:

$(a, b) \sim (c, d) \iff \exists\ r, s \in R^*$ tal que $ar = cs$ e $br = ds$.

A relação acima é de equivalência. De fato, as propriedades reflexiva e simétrica são imediatas. Para verificar a transitividade, consideramos $(a, b) \sim (c, d)$ e $(c, d) \sim (e, f)$. Assim, existem $r, s, t, u \in R^*$ tais que $ar = cs$, $br = ds$, $ct = eu$ e $dt = fu$. Como $s, t \in R^*$ e R é domínio de Ore à direita, existem $m, n \in R^*$ tais que $sm = tn$ e então

$$arm = csm = ctn = eun \quad \text{e} \quad brm = dsm = dtn = fun\ .$$

Tomando $\alpha = rm$ e $\beta = un$ temos $\alpha, \beta \in R^*$ com $a\alpha = e\beta$ e $b\alpha = f\beta$, isto é, $(a, b) \sim (e, f)$. Desta forma, $(a, b) \sim (e, f)$.

Vamos denotar por $[a, b]$ a classe de equivalência de (a, b), ou seja, $[a, b] = \{(x, y)\ /\ (x, y) \sim (a, b)\}$. Seja $D = \{[a, b]\ /\ a \in R,\ b \in R^*\}$. Definimos em D as seguintes operações de soma e produto:

$$[a, b] + [c, d] = [ar + cs, br]\ ,$$

onde $r, s \in R^*$ e satisfazem $br = ds$.

$$[a, b] \cdot [c, d] = [ar, ds]\ ,$$

onde $r, s \in R$, $s \neq 0$ e $br = cs$.

Notamos que na definição da soma, sempre é possível encontrar $r, s \in R^*$ tal que $br = ds$, pois R é domínio de Ore à direita. Na definição do produto, se $c = 0$ tomamos $r = 0$ e qualquer $s \in R^*$, e se $c \neq 0$, então as existências de r, s são novamente garantidas pelo fato de R ser domínio de Ore à direita.

A verificação de que as operações acima estão bem definidas, requer muitas contas e por isso não faremos. Contudo ressaltamos que tal fato está assegurado em [1] e [10] .

Lema 1.2.1. $(D, +, \cdot)$ *é um anel de divisão com unidade* $[1, 1]$.

Demonstração: É fácil verificar que a soma é comutativa, que $[0, 1]$ é o elemento neutro, que o simétrico de $[a, b]$ é $[-a, b]$ e que $[1, 1]$ é a unidade.

$([a, b] + [c, d]) + [e, f] = [a, b] + ([c, d] + [e, f])$.

Por definição, $([a, b]+[c, d])+[e, f] = [ar+cs, br]+[e, f]$ onde $r, s \in R^*$ e $br = ds$. Analogamente, $[ar + cs, br] + [e, f] = [(ar + cs)r_1 + es_1, brr_1]$ onde $r_1, s_1 \in R^*$ e $brr_1 = fs_1$. Mas de $br = ds$ segue que $brr_1 = dsr_1$, e então $dsr_1 = fs_1$. Note que para cada $s \in R^*$ e para cada $[c, d] \in D$ temos $[c, d] = [cs, ds]$. Desta forma, $[c, d] + [e, f] = [cs, ds] + [e, f] = [csr_1 + es_1, dsr_1] = [csr_1 + es_1, brr_1]$. Assim, $[a, b] + ([c, d] + [e, f]) = [arr_1, brr_1] + ([c, d] + [e, f]) = [arr_1 + csr_1 + es_1, brr_1] = [(ar + cs)r_1 + es_1, brr_1]$.

$([a, b] + [c, d]) \cdot [e, f] = [a, b] \cdot [e, f] + [c, d] \cdot [e, f]$.

Temos que $([a, b] + [c, d]) \cdot [e, f] = [ar + cs, br] \cdot [e, f]$, onde $r, s \in R^*$ e $br = ds$. Portanto $([a, b] + [c, d]) \cdot [e, f] = [(ar + cs)r_1, fs_1]$, onde $r_1, s_1 \in R, s_1 \neq 0$ e $brr_1 = es_1$. Desta forma, $es_1 = dsr_1$. Se $r_1 = 0$ então $e = 0$ e a igualdade é satisfeita trivialmente. Se $r_1 \neq 0$ então $[a, b] \cdot [e, f] = [arr_1, brr_1] \cdot [es_1, fs_1] = [arr_1, fs_1]$ e $[c, d] \cdot [e, f] = [csr_1, dsr_1] \cdot [es_1, fs_1] = [csr_1, fs_1]$. Desta forma, $[a, b] \cdot [e, f] + [c, d] \cdot [e, f] = [arr_1, fs_1] + [csr_1, fs_1] = [(ar + cs)r_1, fs_1]$. Analogamente se verifica que $[a, b] \cdot ([c, d] + [e, f]) = [a, b] \cdot [c, d] + [a, b] \cdot [e, f]$.

$([a, b] \cdot [c, d]) \cdot [e, f] = [a, b] \cdot ([c, d] \cdot [e, f])$.

Temos que $([a, b] \cdot [c, d]) \cdot [e, f] = [ar, ds] \cdot [e, f]$, sendo $r, s \in R, s \neq 0$ e $br = cs$. Além disso, $[ar, ds] \cdot [e, f] = [arr_1, fs_1]$, com $r_1, s_1 \in R, s_1 \neq 0$ e $dsr_1 = es_1$. Se $rr_1 \in R^*$ obtemos que $[c, d] \cdot [e, f] = [csr_1, dsr_1] \cdot [es_1, fs_1] = [csr_1, fs_1]$. Mas, $[a, b] \cdot [csr_1, fs_1] = [arr_1, brr_1] \cdot [csr_1, fs_1] = [arr_1, fs_1]$ e então segue a igualdade. Se $rr_1 = 0$ então $c = 0$ ou $e = 0$. Em ambos os casos, a igualdade desejada é verificada facilmente.

Finalmente para ver que D é anel de divisão, considere $[a, b] \in D$ tal que $[a, b] \neq [0, 1]$. Assim $0 \neq a$, donde $[b, a] \in D$ e vale $[a, b] \cdot [b, a] = [a, a] = [1, 1]$. Da mesma forma, $[b, a] \cdot [a, b] = [b, b] = [1, 1]$.

□

Claramente a função

$$\begin{aligned} \varphi : \ & R \longrightarrow D \\ & r \longmapsto [r, 1] \end{aligned}$$

é um homomorfismo injetor. Portanto, identificando R com o conjunto $\varphi(R) = \{[r, 1] \ / \ r \in R\}$, vem que R é subanel de D.

Proposição 1.2.1. *D é o anel quociente clássico à direita para R.*

Demonstração: Note que para cada $r \in R^*$ temos $[r, 1]^{-1} = [1, r] \in D$. Além disso, $D = \{[a, b] \ / \ a \in R, b \in R^*\} = \{[a, 1][1, b] \ / \ a \in R, b \in R^*\}$. Portanto, D é o anel quociente clássico à direita para R.

□

Observações:

1. A construção de Ore generaliza a construção clássica do corpo de frações. De fato, quando R é domínio comutativo, dados $(a, b), (c, d) \in R \times R^*$ temos $(a, b) \sim (c, d)$ se, e somente se, existem $r, s \in R^*$ tal que $ar = cs$ e $br = ds$. Assim $ards = brcs$, e como R é domínio comutativo, vem que $ad = bc$, que é a maneira como é definida a relação de equivalência na construção do corpo de frações.

2. Fazendo a construção de Ore, a partir de um anel de divisão R, obtemos um anel de divisão D que é um anel quociente clássico para R. Desde que R é seu próprio anel quociente clássico, temos pela unicidade que $D \simeq R$. Podemos explicitar esse isomorfismo de anéis, observando que $D = \{[a, b] \ / \ a, b \in R, b \neq 0\} = \{[ab^{-1}, 1] \ / \ a, b \in R, b \neq 0\}$ e então definindo $\varphi : D \longrightarrow R$ por $\varphi([ab^{-1}, 1]) = ab^{-1}$.

Sabemos que todo domínio de Ore à direita tem um anel quociente clássico à direita. A recíproca deste fato também é verdadeira.

Lema 1.2.2. *Seja R um domínio. São equivalentes:*

i. *R é domínio de Ore à direita.*

ii. *R tem anel quociente clássico à direita.*

Demonstração: $(i \Rightarrow ii)$ É consequência da proposição anterior.
$(ii \Rightarrow i)$ Sejam $u, v \in R^*$ e $D = \{ab^{-1} \ / \ a \in R, b \in R^*\}$ o anel quociente clássico à direita para R. Segue que $u^{-1}v \in D$ e então existem $a, b \in R$ com $b \neq 0$ tais que $u^{-1}v = ab^{-1}$. Portanto, $0 \neq vb = ua \in uR \cap vR$.

□

Quando R não é domínio a construção de Ore não se aplica, mesmo que R seja comutativo. Para justificar esta afirmação, verificaremos que a relação de Ore não é uma relação de equivalência quando $R = \mathbb{Z}_6$. De fato, temos $(\overline{2}, \overline{3}) \sim (\overline{1}, \overline{3})$, pois $\overline{2} \cdot \overline{4} = \overline{1} \cdot \overline{2}$ e $\overline{3} \cdot \overline{4} = \overline{3} \cdot \overline{2}$, e $(\overline{1}, \overline{3}) \sim (\overline{3}, \overline{3})$ pois $\overline{1} \cdot \overline{3} = \overline{3} \cdot \overline{3}$ e $\overline{3} \cdot \overline{3} = \overline{3} \cdot \overline{3}$. Porém $(\overline{2}, \overline{3}) \not\sim (\overline{3}, \overline{3})$. Caso $(\overline{2}, \overline{3}) \sim (\overline{3}, \overline{3})$, então existiriam $r, s \in \mathbb{Z}_6$ com $r, s \neq 0$ tais que

$$\begin{cases} \overline{2r} = \overline{3s} \\ \overline{3r} = \overline{3s} \end{cases} .$$

Note que $\overline{2r} \in \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$ e $\overline{3s} \in \{\overline{0}, \overline{3}\}$. Assim, o sistema acima não tem solução não nula. Apesar disso, lembramos que $\mathbb{Z}_6$ é seu próprio anel quociente, como vimos na seção anterior.

1.3 Localização em Anéis Comutativos

Vimos que a construção de Ore não se aplica quando o anel R não é domínio. No entanto, existe uma outra construção, chamada localização comutativa, que nos possibilita obter um anel de frações e em particular o anel quociente clássico para um anel comutativo.

Fixemos nesta seção, R como sendo um anel comutativo.

Definição 1.3.1. *Um subconjunto $S \subseteq R$ é um sistema multiplicativo quando:*

i. $1 \in S$.

ii. $0 \notin S$.

iii. $x, y \in S \Longrightarrow xy \in S$.

Exemplos:

1. O conjunto $S = R^*$ é um sistema multiplicativo para o anel R. Em particular quando R é domínio temos que $S = R - \{0\}$ é um sistema multiplicativo.

2. Se $P \subseteq R$ é um ideal primo então $S = R - P$ é um sistema multiplicativo.

3. Se I é um ideal próprio de R, então $S = 1 + I = \{1 + x \ / \ x \in I\}$ é um sistema multiplicativo.

Definição 1.3.2. *Dado um sistema multiplicativo $S \subseteq R$, dizemos que um anel Q é um anel de frações de R segundo o sistema multiplicativo S, se existe um homomorfismo de anel $\varphi : R \longrightarrow Q$ satisfazendo:*

i. $\varphi(s)$ *é inversível para cada* $s \in S$.

ii. Cada elemento em Q *tem a forma* $\varphi(a)\varphi(s)^{-1}$ *com* $s \in S$ *e* $a \in R$.

iii. $\varphi(a) = 0 \Longleftrightarrow as = 0$ *para algum* $s \in S$.

Quando $S = R^*$, a condição (iii) da definição acima diz que φ é injetora. Neste caso, identificando R com sua imagem vemos que R é subanel de Q. A condição (i) assegura que todo elemento regular de R tem inverso em Q e finalmente a outra condição implica em $Q = \{ab^{-1} \ / \ a \in R, b \in R^*\}$. Portanto neste sistema multiplicativo, o anel de frações é o anel quociente clássico para R.

Passaremos agora a construção do anel de frações de um anel comutativo com unidade R, segundo um sistema multiplicativo qualquer S.

Em $R \times S$ defina a relação: $(a, s) \equiv (b, t)$ se, e somente se, existe $u \in S$ tal que $u(at - bs) = 0$.

Note que excluímos 0 do sistema multiplicativo S, pois quando $0 \in S$ temos que $(a, s) \equiv (b, t)$ para quaisquer $a, b \in R$ e $s, t \in S$, e assim todos os pares estariam relacionados.

Lema 1.3.1. *A relação* $\equiv$ *é de equivalência.*

Demonstração: As propriedades reflexiva e simétrica são imediatas. Para verificar a transitividade, considere $(a, s) \equiv (b, t)$ e $(b, t) \equiv (c, r)$. Por hipótese, temos $u, u_1 \in S$ tais que $u(at - bs) = 0$ e $u_1(br - ct) = 0$. Então,

$$\begin{cases} uu_1r(at - bs) = 0 \\ u_1us(br - ct) = 0 \end{cases}.$$

Assim, $uu_1rat - uu_1stc = 0$, ou seja, $uu_1t(ar - cs) = 0$. Como $uu_1t \in S$, segue que, $(a, s) \equiv (c, r)$.

$\square$

Observações:

1. Note que usamos a comutatividade de R para verificar que a relação $\equiv$ é de equivalência. De fato, a exigência da comutatividade é essencial para esta verificação. Sem a comutatividade temos como contra-exemplo o anel de divisão dos quatérnios reais. Dado qualquer sistema multiplicativo S contido no anel dos quatérnios temos $(i, k) \equiv (1, j)$ e $(1, j) \equiv (-k, i)$, mas $(i, k) \not\equiv (-k, i)$.

2. No caso em que R é domínio temos que $(a, s) \equiv (b, t)$ se, e somente se, $at = bs$. Portanto, quando R é domínio e $S = R^*$ a relação $\equiv$ coincide com a relação usada na construção do corpo de frações de R.

Vamos denotar a classe $\overline{(a, s)}$ por $\frac{a}{s}$. Consideremos agora o conjunto das classes $S^{-1}R := \{\frac{a}{s} \ / \ a \in R, s \in S\}$.

Definimos em $S^{-1}R$ as seguintes relações:

$$\begin{array}{rccc} + : & S^{-1}R \times S^{-1}R & \longrightarrow & S^{-1}R \\ & \left(\frac{a}{s}, \frac{b}{t}\right) & \longmapsto & \frac{at+sb}{st} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & S^{-1}R \times S^{-1}R & \longrightarrow & S^{-1}R \\ & \left(\frac{a}{s}, \frac{b}{t}\right) & \longmapsto & \frac{ab}{st} \end{array}$$

Lema 1.3.2. *As relações acima são operações.*

Demonstração: Sejam $\frac{a}{s}, \frac{b}{t}, \frac{a_1}{s_1}, \frac{b_1}{t_1} \in S^{-1}R$ com $\frac{a}{s} = \frac{b}{t}$ e $\frac{a_1}{s_1} = \frac{b_1}{t_1}$. Então existem $u, u_1 \in S$ tais que $u(at - bs) = 0$ e $u_1(a_1t_1 - b_1s_1) = 0$. Assim,

$$\begin{cases} uu_1(at - bs) = 0 \\ uu_1(a_1t_1 - b_1s_1) = 0 \end{cases},$$

ou seja,

$$\begin{cases} uu_1(ats_1t_1 - bss_1t_1) = 0 \\ uu_1(a_1t_1st - b_1s_1st) = 0 \end{cases}.$$

Portanto, $uu_1[tt_1(as_1 + a_1s) - ss_1(bt_1 + b_1t)] = 0$. Como $uu_1 \in S$ temos $\frac{as_1+a_1s}{ss_1} =$

$\frac{bt_1+b_1t}{tt_1}$. Por outro lado,

$$\begin{cases} uu_1(ata_1t_1 - bsa_1t_1) = 0 \\ uu_1(a_1t_1bs - b_1s_1bs) = 0 \end{cases},$$

ou seja, $uu_1(ata_1t_1 - b_1s_1bs) = 0$. Desta forma, $\frac{aa_1}{ss_1} = \frac{bb_1}{tt_1}$.

□

Proposição 1.3.1. *$(S^{-1}R, +, \cdot)$ é anel comutativo com unidade $\frac{1}{1}$.*

Demonstração: Imediato.

□

Definição 1.3.3. *O anel comutativo $S^{-1}R$ é chamado de anel de frações de R segundo o sistema multiplicativo S.*

Note que esta definição não causa conflito com a Definição 1.3.2, visto que a função $\varphi : R \longrightarrow S^{-1}R$ dada por $\varphi(a) = \frac{a}{1}$ é um homomorfismo de anéis que satisfaz as condições da Definição 1.3.2.
Observações:

1. Se $s, t \in S$ então $\frac{s}{t}$ é inversível em $S^{-1}R$ e $(\frac{s}{t})^{-1} = \frac{t}{s}$.

2. Dado $\frac{a}{s} \in S^{-1}R$, se existir $b \in R$ tal que $ab \in S$ então $\frac{a}{s}$ é inversível em $S^{-1}R$. De fato, se $b \in R$ é tal que $ab \in S$, então $\frac{a}{s} \cdot (\frac{s}{ab} \cdot \frac{b}{1}) = \frac{asb}{asb} = \frac{1}{1}$. Analogamente, verifica-se que $\frac{sb}{ab}$ é o inverso à esquerda de $\frac{a}{s}$. Assim, $(\frac{a}{s})^{-1} = \frac{sb}{ab}$.

3. Se D é domínio comutativo e $\frac{a}{s}$ é inversível em $S^{-1}D$ então existe $b \in D$ tal que $ab \in S$.
Vamos supor que $(\frac{a}{s})^{-1} = \frac{b}{t} \in S^{-1}D$. Então, $\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{1}{1}$, ou seja, existe $u \in S$ tal que $u(ab - st) = 0$. Como D é domínio, segue que, $ab = st \in S$.

Exemplos:

i. Se $S = R^*$ então $S^{-1}R$ é o anel quociente clássico para R. Em particular, se R é domínio comutativo então $S^{-1}R$ é o corpo de frações de R.

ii. Seja P um ideal primo de R. Tomando $S = R - P$ temos que $S^{-1}R = \{\frac{a}{b} \ / \ a, b \in R, b \notin P\}$. Neste caso, denotamos $S^{-1}R$ por $R_{(p)}$.

1.4 Localização em Módulos sobre Anéis Comutativos

Nesta seção faremos uma construção para módulos sobre anéis comutativos, de forma análoga a feita para anéis comutativos.

Fixemos, nesta seção, R como sendo um anel comutativo e M um R-módulo à direita.

Dado um sistema multiplicativo $S \subseteq R$, definimos em $M \times S$ a relação: $(m, s) \equiv (m_1, s_1)$ se, e somente se, existe $t \in S$ tal que $(m_1 s - m s_1)t = 0$. De forma análoga ao caso da localização de anéis, verifica-se que esta relação é de equivalência.

Denotemos a classe $\overline{(m, s)}$ por $\frac{m}{s}$ e o conjunto das classes por $S^{-1}M$, ou seja, $S^{-1}M = \{\frac{m}{s} \ / \ m \in M, s \in S\}$. Agora definimos as seguintes relações:

$$
\begin{array}{rccc}
+: & S^{-1}M \times S^{-1}M & \longrightarrow & S^{-1}M \\
 & \left(\frac{m}{s}, \frac{m_1}{t}\right) & \longmapsto & \frac{mt + m_1 s}{st} \\[2ex]
\cdot: & S^{-1}M \times S^{-1}R & \longrightarrow & S^{-1}M \\
 & \left(\frac{m}{s}, \frac{a}{t}\right) & \longmapsto & \frac{ma}{st}
\end{array}
$$

Verifica-se também, de forma análoga ao caso da localização comutativa, que estas relações são operações.

Lema 1.4.1. *$S^{-1}M$ é um $S^{-1}R$ módulo à direita.*

Demonstração: Imediato.

□

Definição 1.4.1. *O $S^{-1}R$-módulo à direita $S^{-1}M$ é chamado módulo de frações.*

Observações:

1. De forma análoga, pode-se repetir esta construção para um R-módulo à esquerda.

2. Fazendo $M = R$ obtemos o $S^{-1}R$-módulo à direita ou à esquerda $S^{-1}R$.

3. Se M é um R-módulo à direita, podemos verificar facilmente que $S^{-1}M$ é R-módulo à direita, com a operação soma definida anteriormente e a operação produto definida por:

$$
\begin{array}{rccc}
\cdot : & S^{-1}M \times R & \longrightarrow & S^{-1}M \\
& \left(\frac{m}{s}, r\right) & \longmapsto & \frac{mr}{s}
\end{array}
$$

Vimos até o momento como construir um anel quociente clássico à direita para um domínio de Ore, e para um anel comutativo com unidade. Verificamos ainda que a construção de Ore não se aplica a um domínio qualquer, mesmo que este seja comutativo. Por outro lado, a construção através de localização comutativa depende essencialmente da comutatividade do anel.

Nosso objetivo é apresentar uma forma de fazer localização sobre anéis não comutativos, visando obter o anel quociente clássico. Pretendemos estudar propriedades desta localização não comutativa, para obter resultados análogos aos da localização comutativa.

Destacamos abaixo algumas propriedades do anel $K = S^{-1}R$, quando R é um domínio comutativo e $S = R^*$, que terão suas análogas verificadas para a localização não comutativa:

1. K é o corpo de frações de R.
2. S^{-1} : Mod-$R \longrightarrow$ Mod-R é um funtor exato.
3. Se A é um R-módulo à direita (à esquerda) então $S^{-1}A = \mathcal{E}\left(\frac{A}{T(A)}\right)$.
4. $T(K) = 0$ e $T\left(\frac{A}{T(A)}\right) = 0$ para todo R-módulo A.
5. K é anel regular.
6. K é anel auto-injetivo.
7. K é anel simples.
8. S^{-1} e $(\_) \otimes_R K$ são funtores equivalentes na categoria $Mod\ R$.
9. K é um R-módulo plano.

Já vimos na seção anterior que $K = S^{-1}R$ é o corpo de frações de R, e portanto é um anel simples. No próximo capítulo apresentamos as definições e resultados necessários para demonstrar as demais propriedades.

Capítulo 2

Propriedades da Localização $S^{-1}R$

Nas próximas seções, desenvolveremos alguns conceitos e resultados relacionados com anéis, módulos, categorias e funtores. Faremos esta exposição trabalhando com anéis não comutativos. Alguns destes resultados serão utilizados apenas nos dois últimos capítulos. Optamos por apresentá-los aqui pois estão relacionados com os resultados que precisamos para demonstrar o Teorema 2.7.1, e também para que nos capítulos finais tratemos apenas das propriedades da localização não comutativa.

2.1 Homologia

Vamos fixar R como sendo um anel com unidade e os módulos considerados nesta seção como R-módulos à direita.

Definição 2.1.1. *Sejam $\{M_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ uma família de R-módulos e para cada i, $f_i : M_i \longrightarrow M_{i+1}$ um R-homomorfismo. Dizemos que a sequência $\cdots \longrightarrow M_{i-1} \longrightarrow M_i \longrightarrow M_{i+1} \longrightarrow \cdots$ é exata em M_i quando $f_{i-1}(M_{i-1}) = \mathrm{Ker}(f_i)$. A sequência é exata quando for exata em cada M_i, $i \in \mathbb{Z}$.*

Observações:

1. Seja $f : M \longrightarrow N$ um R-homomorfismo. Então f é sobrejetor se, e somente se, $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ é exata.

2. Seja $f : M \longrightarrow N$ um R-homomorfismo. Então f é injetor se, e somente se, $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ é exata.

3. Uma sequência exata curta é uma sequência exata da forma $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$.

Definição 2.1.2. *Dizemos que uma sequência exata $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ cinde se existe um R-homomorfismo $j : N \longrightarrow M$ tal que $f_o j = Id_N$. Analogamente, a sequência exata $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ cinde se existe um R-homomorfismo $j : N \longrightarrow M$ tal que $j_o f = Id_M$. Em ambos os casos, j é chamado de cisão de f.*

Lema 2.1.1. *(a) Se $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ cinde, então $M = \mathrm{Ker}(f) \oplus j(N)$, sendo j a cisão de f.*

(b) Se $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ cinde, então $N = f(M) \oplus \mathrm{Ker}(j)$, sendo j a cisão de f.

(c) Sejam $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ exata e M' um R-módulo tal que $M = \mathrm{Ker}(f) \oplus M'$. Então para cada $n \in N$, existe um único $m' \in M'$ tal que $f(m') = n$.

Demonstração: (a) Seja $j : N \longrightarrow M$ um R-homomorfismo tal que $f_o j = Id_N$. Dado $m \in M$, podemos escrever $m = (m - j(f(m)) + j(f(m))$, sendo $j(f(m)) \in j(N)$ e $m - j(f(m)) \in \mathrm{Ker}(f)$. De fato, $f(m - j(f(m))) = f(m) - (f_o j)(f(m)) = f(m) - f(m) = 0$. Além disso, se $a \in (\mathrm{Ker}(f) \cap j(N))$ então $f(a) = 0$ e $a = j(n)$ para algum $n \in N$. Assim, $0 = f(a) = (f_o j)(n) = n$, e portanto, $a = 0$.
(b) Seja $j : N \longrightarrow M$ um R-homomorfismo tal que $j_o f = Id_M$. Dado $n \in N$, escrevemos $n = f(j(n)) + (n - f(j(n))$, e notamos que $f(j(n)) \in f(M)$ e $j(n - f(j(n)) \in \mathrm{Ker}(j)$. De fato, $j(n - f(j(n))) = j(n) - (j_o f)(j(n)) = j(n) - j(n) = 0$. Seja $a \in (f(M) \cap \mathrm{Ker}(j))$, então, $j(a) = 0$ e $a = f(m)$ para algum $m \in M$. Assim, $0 = j(a) = (j_o f)(m) = m$, e portanto, $a = 0$.
(c) Como f é sobrejetora, dado $n \in N$ existe $m = x + m' \in M = \mathrm{Ker}(f) \oplus M'$ tal que $n = f(m) = f(x) + f(m') = f(m')$. Suponha que $m', l' \in M'$ e $f(m') = f(l')$. Então $f(m' - l') = 0$, ou seja, $m' - l' \in \mathrm{Ker}(f)$. Lembre que $\frac{M}{\mathrm{Ker}(f)} \simeq M'$, e seja ψ este isomorfismo. Assim, existem $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in \frac{M}{\mathrm{Ker}(f)}$ tais que $\psi(\overline{\alpha}) = m'$ e $\psi(\overline{\beta}) = l'$. Portanto, $m' - l' = \psi(\overline{\beta}) - \psi(\overline{\alpha}) \in \mathrm{Ker}(f)$ e $\psi(\overline{\beta}) - \psi(\overline{\alpha}) \in M'$. Logo, $m' = l'$.

□

Teorema 2.1.1. *Seja $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ uma sequência exata curta. São equivalentes:*

i. $Im(f) = \mathrm{Ker}(g)$ é somando direto de N.

ii. A sequência cinde em f.

iii. A sequência cinde em g.

Nestas condições, $N \simeq M \oplus P$.

Demonstração: ($iii \Rightarrow i$) Segue do Lema 2.1.1 (a).
($ii \Rightarrow i$) Segue do Lema 2.1.1 (b).
($i \Rightarrow ii$) Seja $E = Im(f)$. Por hipótese, existe $E_1 \leq N$ tal que $N = E \oplus E_1$. Defina $f_1 : N = E \oplus E_1 \longrightarrow M$ tal que $f_1(e + e_1) = x$, onde x é o único elemento de M tal que $f(x) = e$. É fácil verificar que f_1 é R-homomorfismo. Dado $x \in M$ temos $f(x) = f(x) + 0 \in E + E_1$. Além disso, $f_1(f(x)) = t$ onde t é o único elemento de M tal que $f(t) = f(x)$. Como f é injetora, vem que $t = x$. Portanto, $f_1 \circ f = Id_M$.
($i \Rightarrow iii$) Por hipótese, existe $E_1 \leq N$ tal que $N = \mathrm{Ker}(g) \oplus E_1$. Usando o Lema 2.1.1 (c), vem que $g_1 : P \longrightarrow N$ dada por $g_1(y) = e_1$ está bem definida, onde $e_1 \in E$ é o único elemento de E_1 tal que $g(e_1) = y$. Pode-se verificar rapidamente que g_1 é R-homomorfismo. Pela definição de g_1, dado $y \in P$ temos $g(g_1(y)) = g(t)$, onde t é o único elemento de N tal que $g(t) = y$. Portanto, $g(g_1(y)) = y$, ou seja, $g \circ g_1 = Id_P$. Desta forma, a sequência cinde em g.
Finalmente, pelo item (iii) e pelo Lema 2.1.1 (a) temos $N = \mathrm{Ker}(g) \oplus Im(g_1)$. Mas g_1 é injetora, e portanto $Im(g_1) \simeq P$. Porém f também é injetora. Logo, $N = \mathrm{Ker}(g) \oplus Im(g_1) = Im(f) \oplus Im(g_1) \simeq M \oplus P$.

□

Lema 2.1.2. *Sejam N, M, P R-módulos tal que $N = M \oplus P$. Então a sequência $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ onde $f(m) = m + 0$ e $g(m + p) = p$ é exata e cinde.*

Demonstração: Óbvio.

□

2.2 Módulos Livres

Sejam R um anel com unidade e I um conjunto de índices. Usaremos a notação $R^{(I)} = \bigoplus\limits_{i \in I} R_i$ onde $R_i = R$ para todo $i \in I$. Desta forma,

$$R^{(I)} = \{(\lambda_i)_{i \in I} \; / \; (\lambda_i)_{i \in I} \text{ é sequência quase nula e } \lambda_i \in R, \;\; \forall i \in I\} \; .$$

Definição 2.2.1. *Sejam M um R-módulo e $\{x_i\}_{i \in I}$ uma família de elementos de M. Dizemos que:*

(a) $x \in M$ *é combinação linear da família* $\{x_i\}_{i\in I}$ *se existe* $\{\lambda_i\}_{i\in I} \in R^{(I)}$ *tal que* $x = \sum_{i\in I} x_i\lambda_i$.

(b) $\{x_i\}_{i\in I}$ *é linearmente independente (L.I.) se dado* $\{\lambda_i\}_{i\in I} \in R^{(I)}$ *tal que* $\sum_{i\in I} x_i\lambda_i = 0$ *tivermos* $\lambda_i = 0$, *para todo* $i \in I$.

(c) $\{x_i\}_{i\in I}$ *é R-base de M quando* $\{x_i\}_{i\in I}$ *é L.I. e todo elemento de M é combinação linear da família* $\{x_i\}_{i\in I}$. *Neste caso, dizemos que M é R-módulo livre.*

Exemplos:

1. Todo K-espaço vetorial não nulo é um K-módulo livre.

2. Se R é um anel com unidade então R_R é um R-módulo livre com base $\{1\}$.

Proposição 2.2.1. *Sejam M e N R-módulos com M livre e* $X = \{x_i\}_{i\in I}$ *a R-base de M. Dada uma função* $f : X \longrightarrow N$, *existe um único R-homomorfismo* $\overline{f} : M \longrightarrow N$ *que estende* f.

Demonstração: Dado $m \in M$, sabemos que $m = \sum_{i\in I} x_i\lambda_i$, sendo $(\lambda_i)_{i\in I} \in R^{(I)}$ uma sequência quase nula. Defina $\overline{f} : M \longrightarrow N$ por $\overline{f}(m) = \sum_{i\in I} f(x_i)\lambda_i$. É fácil verificar que $\overline{f}$ está bem definida, é um R-homomorfismo e é a única extensão de f.

□

Proposição 2.2.2. *Sejam* L, M, N *R-módulos,* $f : M \longrightarrow N$ *um R-epimorfismo e* $g : L \longrightarrow N$ *um R-homomorfismo. Se L é livre, então existe um R-homomorfismo* $\overline{g} : L \longrightarrow M$ *tal que* $\overline{g} \circ f = g$.

Demonstração: Devemos mostrar que existe um R-homomorfismo $\overline{g} : L \longrightarrow M$ tal que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, dotted, "\overline{g}"'] \arrow[d, "g"] & \\ M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Seja $X = \{x_i\}_{i\in I}$ a R-base de L. Então $g(x_i) \in N$ para todo $i \in I$. Como f é sobrejetora, para cada $i \in I$, existe $m_i \in M$ tal que $f(m_i) = g(x_i)$. Defina $g_1 : X \longrightarrow M$ por $g_1(x_i) = m_i$. Pela Proposição 2.2.1, existe um R-homomorfismo $\overline{g} : L \longrightarrow M$ tal que $\overline{g}(x_i) = m_i$, para todo $i \in I$. Claramente $f \circ \overline{g} = g$.

□

Corolário 2.2.1. *Seja* $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \xrightarrow{f} L \longrightarrow 0$ *uma sequência exata de R-módulos. Se L é livre então a sequência cinde.*

Demonstração: Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd} & & & L \arrow[dl, dotted, "g"'] \arrow[d, "Id_L"] & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] & L \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Pela Proposição 2.2.2 existe um R-homomorfismo $g : L \longrightarrow N$ tal que $f \circ g = Id_L$. Logo a sequência cinde.

□

Proposição 2.2.3. *Seja* $f : M \longrightarrow L$ *um R-epimorfismo. Se L é livre então* $M \simeq \mathrm{Ker}(f) \oplus L$.

Demonstração: A sequência exata $0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f) \xhookrightarrow{i} M \xrightarrow{f} L \longrightarrow 0$ cinde pelo corolário acima. O resultado segue do Teorema 2.1.1.

□

Proposição 2.2.4. *Todo R-módulo é imagem epimórfica de um R-módulo livre.*

Demonstração: Seja M um R-módulo e $\{x_i\}_{i\in I}$ um conjunto de geradores de M. Considere o R-módulo livre $R^{(I)}$, que possui base canônica $E = \{e_i\}_{i\in I}$ $(e_i = (y_j),\ y_j = 0$ para $j \neq i,\ y_i = 1)$. Defina

$$\begin{aligned} f \ : \ & E \longrightarrow M \\ & e_i \longmapsto x_i \end{aligned}$$

Pela Proposição 2.2.1, existe um R-homomorfismo $\overline{f} : R^{(I)} \longrightarrow M$ tal que $\overline{f}(e_i) = x_i$. Além disso, dado $m \in M$, existe $(\lambda_i)_{\in I} \in R^{(I)}$ tal que $m = \sum_{i \in I} x_i \lambda_i$. Então,

$$\overline{f}\left((\lambda_i)_{i \in I}\right) = \overline{f}\left(\sum_{i \in I} e_i \lambda_i\right) = \sum_{i \in I} x_i \lambda_i.$$

□

2.3 Produto Tensorial

Para esta seção, fixemos as seguintes notações: R é anel com unidade, M_R é R-módulo à direita, ${}_RN$ é R-módulo à esquerda e T é um grupo abeliano.

Definição 2.3.1. *Uma função $\mathcal{T} : M \times N \longrightarrow T$ é R-tensorial quando:*

i. $\mathcal{T}(m + m_1, n) = \mathcal{T}(m, n) + \mathcal{T}(m_1, n)$

ii. $\mathcal{T}(m, n + n_1) = \mathcal{T}(m, n) + \mathcal{T}(m, n_1)$

iii. $\mathcal{T}(mr, n) = \mathcal{T}(m, rn)$

$\forall m, m_1 \in M$, $\forall n, n_1 \in N$ *e* $\forall r \in R$.

Exemplos:

1. Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo K e $<, >: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ um produto interno. Então é fácil verificar que $<, >$ é K-tensorial.

2. A operação produto de um anel R é R-tensorial.

Definição 2.3.2. *Com a notação acima, dizemos que o par $(T, \mathcal{T})$ é um produto tensorial de M_R e ${}_RN$, se para cada grupo abeliano T' e cada função R-tensorial $\mathcal{T}' : M \times N \longrightarrow T'$ existe um único $\mathbb{Z}$-homomorfismo $f : T \longrightarrow T'$ tal que $f \circ \mathcal{T} = \mathcal{T}'$.*

Nosso objetivo agora é provar a existência e unicidade, a menos de isomorfismo, do produto tensorial.

Proposição 2.3.1. *Se $(T, \mathcal{T})$ e $(T', \mathcal{T}')$ são produtos tensoriais de M_R e ${}_RN$ então existe um $\mathbb{Z}$-isomorfismo $f : T \longrightarrow T'$ tal que $f \circ \mathcal{T} = \mathcal{T}'$*

Demonstração: Temos a seguinte situação:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[d, "\mathcal{T}"'] \arrow[dr, "\mathcal{T}'"] & \\ T \arrow[r, dotted, "f"] & T' \end{tikzcd}$$

Como $(T, \mathcal{T})$ é produto tensorial, existe um único $\mathbb{Z}$-homomorfismo $f : T \longrightarrow T'$ tal que $f \circ \mathcal{T} = \mathcal{T}'$. Analogamente, como $(T', \mathcal{T}')$ é produto tensorial existe um único $\mathbb{Z}$-homomorfismo $g : T' \longrightarrow T$ tal que $g \circ \mathcal{T}' = \mathcal{T}$. Temos então, $(g \circ f) \circ \mathcal{T} = g \circ \mathcal{T}' = \mathcal{T}$ e $(Id_T) \circ \mathcal{T} = \mathcal{T}$. Da unicidade na definição do produto tensorial, segue que $g \circ f = Id_T$. De forma análoga, vem que, $f \circ g = Id_{T'}$. Portanto f é um isomorfismo.

$\square$

Falta provarmos a existência do produto tensorial entre M_R e ${}_RN$. Para tanto, construíremos um par $(T, \mathcal{T})$, e em seguida, provaremos que o mesmo é um produto tensorial entre M_R e ${}_RN$.

Seja $I = M \times N$ e $F = \mathbb{Z}^{(I)}$. Então F é um $\mathbb{Z}$-módulo livre com base canônica $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ e $F = \bigoplus_{\alpha \in I} x_\alpha \mathbb{Z}$. Sejam

$$D_1 = \{x_{(m+m_1,n)} - x_{(m,n)} - x_{(m_1,n)} \ / \ m, m_1 \in M, \ n \in N\}$$

$$D_2 = \{x_{(m,n+n_1)} - x_{(m,n)} - x_{(m,n_1)} \ / \ m \in M, \ n, n_1 \in N\}$$

$$D_3 = \{x_{(mr,n)} - x_{(m,rn)} \ / \ m \in M, \ n \in N, \ r \in R\}$$

e

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \subseteq F \ .$$

Tome $K := \bigcap_{\substack{L \leq F \\ D \subseteq L}} L = \left\{ \sum_{i=1}^{\beta} a_i \lambda_i \, , \, \beta \in \mathbb{N}, \ \lambda_i \in \mathbb{Z} \, , \, a_i \in D \right\}$, ou seja, K é o submódulo de F gerado por D. Finalmente, considere o grupo abeliano $T := \frac{F}{K}$.

Lema 2.3.1. *A função*

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : \ M \times N &\longrightarrow T \\ (m, n) &\longmapsto x_{(m,n)} + K \end{aligned}$$

é R-tensorial.

Demonstração: Sejam $m, m_1 \in M$, $n, n_1 \in N$ e $r \in R$. Note que $x_{(m+m_1,n)} - x_{(m,n)} - x_{(m_1,n)} \in D_1 \subseteq D \subseteq K$ e portanto $x_{(m+m_1,n)} + K = (x_{(m,n)} + x_{(m_1,n)}) + K$. Analogamente, $x_{(m,n+n_1)} + K = (x_{(m,n)} + x_{(m,n_1)}) + K$ e $x_{(mr,n)} + K = x_{(m,nr)} + K$. Assim,

i. $\mathcal{T}(m + m_1, n) = x_{(m+m_1,n)} + K = \left(x_{(m,n)} + x_{(m_1,n)}\right) + K = \left(x_{(m,n)} + K\right) + \left(x_{(m_1,n)} + K\right) = \mathcal{T}(m,n) + \mathcal{T}(m_1,n)$

ii. $\mathcal{T}(m, n + n_1) = x_{(m,n+n_1)} + K = \left(x_{(m,n)} + x_{(m,n_1)}\right) + K = \left(x_{(m,n)} + K\right) + \left(x_{(m,n_1)} + K\right) = \mathcal{T}(m,n) + \mathcal{T}(m,n_1)$

iii. $\mathcal{T}(mr, n) = x_{(mr,n)} + K = x_{(m,rn)} + K = \mathcal{T}(m, rn)$

□

A função $\mathcal{T}$ não é necessariamente sobrejetora, porém $\mathcal{T}(M \times N)$ gera o $\mathbb{Z}$-módulo T. De fato, dado $\overline{u} = u + K \in T$ temos $\overline{u} = \left(\sum_{i \in I} x_i \lambda_i\right) + K = \sum_{i \in I} (x_i \lambda_i + K) = \sum_{i \in I} (x_i + K)\lambda_i = \sum_{i \in I} \mathcal{T}(i)\lambda_i$.

Note que quando $\mathcal{T}$ é $\mathbb{Z}$-homomorfismo, $\mathcal{T}$ é sobrejetor.

Teorema 2.3.1. *O par $(T, \mathcal{T})$ construído acima é um produto tensorial de M_R e ${}_RN$.*

Demonstração: Sejam T' um grupo abeliano e $\mathcal{T}' : M \times N \longrightarrow T'$ uma função R-tensorial. Defina $\gamma : X = \{x_\alpha\}_{\alpha \in I} \longrightarrow T'$ por $\gamma(x_{(m,n)}) = \mathcal{T}'(m,n)$. Pela Proposição 2.2.1, existe um $\mathbb{Z}$-homomorfismo $f' : F \longrightarrow T'$ tal que $f'|_X = \gamma$. Considere $i : M \times N \longrightarrow F$, $i((m,n)) = x_{(m,n)}$. Então $f' \circ i = \mathcal{T}'$, e pode-se verificar que $f'(K) = (0)$ pois f' é um $\mathbb{Z}$-homomorfismo que se anula nos geradores de K. Defina agora $f : T = \frac{F}{K} \longrightarrow T'$, $f(\overline{x} = x + K) = f'(x)$. Se $\overline{x} = \overline{y}$ então $x - y \in K$. Assim, $f'(x) = f'(y)$, ou seja, $f(\overline{x}) = f(\overline{y})$. Desta forma, a função f está bem definida. Além disso, f é $\mathbb{Z}$-homomorfismo, pois f' é $\mathbb{Z}$-homomorfismo. Temos também que $f(\mathcal{T}(m,n)) = f\left(x_{(m,n)} + K\right) = f'\left(x_{(m,n)}\right) = \mathcal{T}'(m,n)$, $\forall (m,n) \in M \times N$. Portanto, $f \circ \mathcal{T} = \mathcal{T}'$. Falta verificar apenas a unicidade de f. Seja $g : T \longrightarrow T'$ um $\mathbb{Z}$-homomorfismo tal que $g \circ \mathcal{T} = \mathcal{T}'$. Assim, $g \circ \mathcal{T} = f \circ \mathcal{T}$. Seja $\overline{t} \in T$, $\overline{t} = \sum_{i \in I} \mathcal{T}(i)\lambda_i$, $\lambda_i \in \mathbb{Z}$. Temos $g(\overline{t}) = \sum_{i \in I} (g \circ \mathcal{T})(i)\lambda_i = \sum_{i \in I} (f \circ \mathcal{T})(i)\lambda_i = f\left(\sum_{i \in I} \mathcal{T}(i)\lambda_i\right) = f(\overline{t})$. □

Denotaremos o único produto tensorial construído acima por $T = M \otimes_R N$, e para cada $(m, n) \in M \times N$, escrevemos $\mathcal{T}(m, n) = m \otimes n$. Note que dado $u \in M \otimes_R N$, como $\mathcal{T}(M \times N)$ gera $M \otimes_R N$, temos $u = \sum_{i=1}^{n} m_i \otimes n_i, \quad n \in \mathbb{N}$.

Proposição 2.3.2. *Sejam R um anel com unidade e M_R e ${}_RN$. Então:*

i. $(m_1 + m_2) \otimes n = (m_1 \otimes n) + (m_2 \otimes n)$

ii. $m \otimes (n_1 + n_2) = (m \otimes n_1) + (m \otimes n_2)$

iii. $mr \otimes n = m \otimes rn$

iv. $0 \otimes n = m \otimes 0 = 0$

v. $-(m \otimes n) = (-m) \otimes n = m \otimes (-n)$

vi. $z(m \otimes n) = (mz) \otimes n = m \otimes (zn)$

$\forall m, m_1, m_2 \in M, \quad \forall n, n_1, n_2 \in N, \quad \forall r \in R, \quad \forall z \in \mathbb{Z}.$

Demonstração: Os itens (i),(ii) e (iii) são consequências imediatas de $\mathcal{T}$ ser R-tensorial. Os itens (iv),(v) e (vi) são verificados facilmente.

□

Observações:

1. Podemos considerar $M \otimes_R N$ como $\mathbb{Z}$-módulo à esquerda ou à direita conforme conveniência.

2. Não é verdade, em geral, que $M \otimes_R N$ tem estrutura de R-módulo, quando M é R-módulo à direita e N é R-módulo à esquerda.

Mostraremos que sob certas condições o produto tensorial $M \otimes_R N$ é um R-módulo. Para isso, usaremos a definição de bimódulo.

Definição 2.3.3. *Sejam A e B anéis com unidade. Se M é um B-módulo à esquerda e um A-módulo à direita tal que $b(ma) = (bm)a \quad \forall b \in B$, $\forall a \in A$ e $\forall m \in M$, dizemos que M é um (B, A)-bimódulo e escrevemos ${}_BM_A$.*

Exemplo: Se R é um anel comutativo com unidade, então todo R-módulo é um R, R-bimódulo.

Lema 2.3.2. *Sejam G um grupo abeliano e B um anel com unidade. Se $v : B \longrightarrow \mathrm{End}(G)$ é homomorfismo de anel com unidade, então G é B-módulo à esquerda com a operação*

$$\begin{aligned} \cdot\ :\ & B \times G \longrightarrow G \\ & (b, g) \longmapsto v(b)(g) \end{aligned}.$$

Demonstração: Sejam $b, b_1 \in B$ e $g, g_1 \in G$.

i. $(bb_1)g = v(bb_1)(g) = [v(b) \circ v(b_1)](g) = v(b)(v(b_1)(g)) = b(b_1 g)$

ii. $b(g + g_1) = v(b)(g + g_1) = v(b)(g) + v(b)(g_1) = bg + bg_1$

iii. $(b + b_1)g = v(b + b_1)(g) = [v(b) + v(b_1)](g) = v(b)(g) + v(b_1)(g) = bg + b_1 g$

iv. $1_B g = v(1_B)(g) = Id(g) = g$

$\square$

Sejam A e B anéis com unidade, M um B, A-bimódulo e N um A-módulo à esquerda. Dado $b \in B$, defina

$$\begin{aligned} \sigma_b\ :\ & M \times N \longrightarrow M \otimes_A N \\ & (m, n) \longmapsto bm \otimes n \end{aligned}.$$

É de rápida verificação que σ_b é A-tensorial, pois M é B, A-bimódulo. Então, existe um único $\mathbb{Z}$-homomorfismo $v_b : M \otimes_A N \longrightarrow M \otimes_A N$ tal que $v_b \circ \mathcal{T} = \sigma_b$.

Lema 2.3.3. *Com as notações acima, a função*

$$\begin{aligned} v\ :\ & B \longrightarrow \mathrm{End}(M \otimes_A N) \\ & b \longmapsto v_b \end{aligned},$$

é um homomorfismo de anéis com unidade.

Demonstração: Visto que a imagem de v é um $\mathbb{Z}$-homomorfismo, é suficiente verificar as igualdades abaixo para um elemento da forma $m \otimes n \in M \otimes_A N$.

i. $v(1_B) = 1_{\mathrm{End}(M \otimes_A N)}$
$v(1_B)(m \otimes n) = v_{1_B}(m \otimes n) = (v_{1_B} \circ \mathcal{T})(m, n) = \sigma_{1_B}(m, n) = 1m \otimes n = m \otimes n.$

ii. $v(b + b_1) = v_b + v_{b_1}$
$v(b + b_1)(m \otimes n) = v_{b+b_1}(\mathcal{T}(m, n)) = \sigma_{b+b_1}(m, n) = (b + b_1)m \otimes n = (bm \otimes n + b_1 m \otimes n) = v_b(m \otimes n) + v_{b_1}(m \otimes n).$

iii. $v(bb_1) = v_b \circ v_{b_1}$

$v(bb_1)(m \otimes n) = v_{bb_1}(\mathcal{T}(m,n)) = \sigma_{bb_1}(m,n) = (bb_1)m \otimes n = b(b_1 m) \otimes n = \sigma_b(b_1 m, n) = v_b(\mathcal{T}(b_1 m, n)) = v_b(b_1 m \otimes n) = v_b(\sigma_{b_1}(m,n)) = v_b(v_{b_1}(m \otimes n))$.

□

Teorema 2.3.2. *Sejam A e B anéis com unidade, M um B,A-bimódulo e N um A-módulo à esquerda. Então $M \otimes_A N$ é B-módulo à esquerda, com produto*

$$\begin{aligned} \cdot : \quad B \times (M \otimes_A N) &\longrightarrow M \otimes_A N \\ (b, (m \otimes n)) &\longmapsto v_b(m \times n) \end{aligned}$$

Demonstração: Segue dos Lemas 2.3.2 e 2.3.3 .

□

Corolário 2.3.1. *Se R é anel comutativo com unidade e M, N são R-módulos então $M \otimes N$ é R, R-bimódulo.*

Demonstração: Imediato.

□

Sejam $f : M \longrightarrow M'$ um R-homomorfismo de módulos à direita e $g : N \longrightarrow N'$ um R-homomorfismo de módulos à esquerda. Defina $(f,g) : M \times N \longrightarrow M' \otimes N'$ por $(f,g)((m,n)) = f(m) \otimes g(n)$. Como (f,g) é R-tensorial, existe um único $\mathbb{Z}$-homomorfismo $f \otimes g : M \otimes N \longrightarrow M' \otimes N'$ tal que $(f \otimes g) \circ \mathcal{T} = (f,g)$, ou seja, $(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n), \quad \forall\ (m \otimes n) \in M \otimes N$. Como caso particular, considere g como sendo a função identidade. Temos então o $\mathbb{Z}$-homomorfismo induzido $f \otimes 1 : M \otimes N \longrightarrow M' \otimes N$ com $(f \otimes 1)(m \otimes n) = f(m) \otimes n$.

Seja $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ uma sequência exata de R-módulos à direita. Para cada R-módulo à esquerda Q, temos uma nova sequência de $\mathbb{Z}$-módulos $0 \longrightarrow M \otimes Q \xrightarrow{f \otimes 1} N \otimes Q \xrightarrow{g \otimes 1} P \otimes Q \longrightarrow 0$. Esta sequência não é exata em geral. De fato, considere a sequência exata de $\mathbb{Z}$-módulos $0 \longrightarrow 2\mathbb{Z} \xhookrightarrow{i} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$. Note que $(i \otimes 1)(2 \otimes 1) = 0$ mas $2 \otimes 1 \neq 0$ em $2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2$. Usaremos isso na próxima seção para dar exemplo de um funtor que não é exato.

Quando a sequência induzida é exata, dizemos que o R-módulo M é plano conforme definição a seguir.

Definição 2.3.4. *Um R-módulo à direita (à esquerda) F é plano, se dado qualquer monomorfismo $f : A \longrightarrow B$ de R-módulos à esquerda (à direita), o $\mathbb{Z}$-homomorfismo induzido*

$$\begin{array}{rrcl} 1\otimes f: & F\otimes A & \longrightarrow & F\otimes B \\ & u\otimes a & \longmapsto & u\otimes f(a) \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrcl} f\otimes 1: & A\otimes F & \longrightarrow & B\otimes F \\ & a\otimes u & \longmapsto & f(a)\otimes u \end{array}\right)$$

é também um monomorfismo.

O resultado válido sempre é apresentado abaixo, e sua demonstração pode ser vista em [1].

Proposição 2.3.3. *Seja $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ uma sequência exata curta de R-módulos à direita. Então para qualquer R-módulo à esquerda Q, a sequência induzida $M\otimes_R Q \xrightarrow{f\otimes 1} N\otimes_R Q \xrightarrow{g\otimes 1} P\otimes_R Q \longrightarrow 0$ é uma sequência exata de $\mathbb{Z}$-módulos.*

2.4 Categorias e Funtores

Sejam A e B conjuntos. Fixaremos a notação $\Im(A,B) = \{f : A \longrightarrow B \;/\; f \text{ é função}\}$.

A definição de categoria apresentada abaixo, é uma particularização de uma definição mais geral(ver [10]). A particularidade reside em considerar apenas conjuntos como objetos da categoria, e também considerar apenas funções como morfismos entre objetos. Para os nossos objetivos, isso não representa perda de generalidade.

Definição 2.4.1. *Uma categoria $\mathcal{M}$ é uma classe de conjuntos, que são chamados objetos de $\mathcal{M}$ e denotados por $Obj(\mathcal{M})$, tal que:*

i. *Se $A, B \in Obj(\mathcal{M})$, existe um conjunto de morfismos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(A,B) \subseteq \Im(A,B)$.*

ii. *Para cada $A \in Obj(\mathcal{M})$ temos $Id_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(A,A)$.*

iii. *Se $A,B,C \in Obj(\mathcal{M})$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(A,B)$ e $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(B,C)$ então $\psi\circ\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(A,C)$.*

iv. *Se $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(A,B)$, $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(B,C)$ e $\delta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(C,D)$ então $(\delta\circ\psi)\circ\varphi = \delta\circ(\psi\circ\varphi)$.*

Observação: Notemos que por (i), $\text{Hom}_{\mathcal{M}} \subseteq \Im(A, B)$, e isso garante a operação de composição entre morfismos.
Exemplos:

1. $A \in Obj(\mathcal{M}) \Longleftrightarrow A$ é conjunto
   $\text{Hom}_{\mathcal{M}}(A, B) = \{f : A \longrightarrow B \ / \ f \text{ é função}\}$
   Temos que $\mathcal{M}$ é a categoria dos conjuntos, cujos morfismos são funções.

2. $A \in Obj(\mathcal{M}) \Longleftrightarrow A$ é espaço topológico
   $\text{Hom}_{\mathcal{M}}(A, B) = \{f : A \longrightarrow B \ / \ f \text{ é função contínua}\}$
   Temos que $\mathcal{M}$ é a categoria dos espaços topológicos.

3. R um anel
   $A \in Obj(\mathcal{M}) \Longleftrightarrow A$ é R-módulo à direita
   $\text{Hom}_{\mathcal{M}}(A, B) = \text{Hom}_R(A, B)$.
   Temos que $\mathcal{M}$ é a categoria dos R-módulos à direita, que denotaremos por Mod-R.
   Analogamente, R-Mod é a categoria dos R-módulos à esquerda.

Definição 2.4.2. *Um funtor da categoria $\mathcal{M}$ na categoria $\mathcal{N}$ é uma função F tal que:*

i. *F leva $Obj(\mathcal{M})$ em $Obj(\mathcal{N})$*

ii. *Se $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{M}}(A, B)$ então $F(\alpha) \in \text{Hom}_{\mathcal{N}}(F(A), F(B))$*

iii. *Se $A \in Obj(\mathcal{M})$ então $F(Id_A) = Id_{F(A)}$*

iv. *Se $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{M}}(A, B)$ e $\beta \in \text{Hom}_{\mathcal{M}}(B, C)$ então $F(\beta \circ \alpha) = F(\beta) \circ F(\alpha)$.*

Um co-funtor (ou funtor contra-variante) da categoria $\mathcal{M}$ na categoria $\mathcal{N}$ é uma função F que satisfaz as condições (i) e (iii) acima e também:

(ii)'. *Se $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{M}}(A, B)$ então $F(\alpha) \in \text{Hom}_{\mathcal{N}}(F(B), F(A))$.*

(iv)'. *Se $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{M}}(A, B)$ e $\beta \in \text{Hom}_{\mathcal{M}}(B, C)$ então $F(\beta \circ \alpha) = F(\alpha) \circ F(\beta)$.*

Exemplos:

1. Toda categoria tem um funtor natural, a saber:

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{M}} : \ & \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} \\ & A \longmapsto A \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} I_{\mathcal{M}} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(A,B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(I_{\mathcal{M}}(A), I_{\mathcal{M}}(B)) \\ \alpha & \longmapsto & \alpha \end{array}$$

2. Seja R um anel comutativo com unidade. Tome S um sistema multiplicativo de R. Considere

$$\begin{array}{rrcl} F: & R\text{-Mod} & \longrightarrow & R\text{-Mod} \\ & A & \longmapsto & S^{-1}A \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} F : \mathrm{Hom}_R(A,B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(F(A), F(B)) \\ \alpha & \longmapsto & F(\alpha) := S^{-1}\alpha \end{array}$$

onde $\alpha : A \longrightarrow B$ é homomorfismo de R-módulos à esquerda e

$$\begin{array}{rrcl} F(\alpha): & S^{-1}A & \longrightarrow & S^{-1}B \\ & \frac{a}{s} & \longmapsto & \frac{\alpha(a)}{s} \end{array}$$

Não há dificuldades para verificar que F é um funtor. Algumas vezes F é chamado funtor localização comutativa.

3. Sejam R um anel comutativo e N um R-módulo à esquerda. Dado $M \in R$-Mod , é fácil verificar que $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ e $\mathrm{Hom}_R(N,M)$ são grupos abelianos com a operação de soma usual de funções, e portanto são $\mathbb{Z}$-módulos à esquerda e à direita.

Assim, podemos relacionar as categorias R-Mod e $\mathbb{Z}$-Mod pelas funções:

$$\begin{array}{rrcl} F^N = \mathrm{Hom}_R(\_, N): & R\text{-Mod} & \longrightarrow & \mathbb{Z}\text{-Mod} \\ & M & \longmapsto & \mathrm{Hom}_R(M,N) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rrcl} F_N = \mathrm{Hom}_R(N, \_): & R\text{-Mod} & \longrightarrow & \mathbb{Z}\text{-Mod} \\ & M & \longmapsto & \mathrm{Hom}_R(N,M) \end{array}$$

Vamos provar que F^N é um co-funtor e que F_N é um funtor. Os conjuntos de morfismo das categorias R-Mod e $\mathbb{Z}$-Mod podem ser relacionados como segue:

se $M, P \in R$-Mod e $\alpha : M \longrightarrow P$ é um R-homomorfismo, definimos

$$\begin{aligned} F^N(\alpha): \quad \mathrm{Hom}_R(P, N) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, N) \\ \delta &\longmapsto \delta \circ \alpha \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} F_N(\alpha): \quad \mathrm{Hom}_R(N, M) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N, P) \\ \sigma &\longmapsto \alpha \circ \sigma \end{aligned}$$

A distributividade da composição em relação a soma de funções assegura que $F^N(\alpha)$ e $F_N(\alpha)$ são $\mathbb{Z}$-homomorfismos. Para $M \in R$-Mod , $\gamma \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ e $\sigma \in \mathrm{Hom}_R(N, M)$ temos $F^N(Id_M)(\gamma) = \gamma \circ Id_M = \gamma = Id_{F^N(M)}(\gamma)$ e $F_N(Id_M)(\sigma) = Id_M \circ \sigma = \sigma = Id_{F_N(M)}(\sigma)$. Assim, $F^N(Id_M) = Id_{F^N(M)}$ e $F_N(Id_M) = Id_{F_N(M)}$. Considere $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(M, P)$ e $\beta \in \mathrm{Hom}_R(P, Q)$. Então para cada $\delta \in \mathrm{Hom}_R(Q, N)$ e cada $\sigma \in \mathrm{Hom}_R(N, M)$ vem que $F^N(\beta \circ \alpha)(\delta) = \delta \circ (\beta \circ \alpha) = (\delta \circ \beta) \circ \alpha = F^N(\alpha)(\delta \circ \beta) = F^N(\alpha)(F^N(\beta)(\delta)) = (F^N(\alpha) \circ F^N(\beta))(\delta)$ e
$F_N(\beta \circ \alpha)(\sigma) = (\beta \circ \alpha) \circ \sigma = \beta \circ (\alpha \circ \sigma) = F_N(\beta)(F^N(\alpha)(\sigma)) = (F_N(\beta) \circ F_N(\alpha))(\sigma)$.

Note que este exemplo fornece uma maneira de construir famílias de funtores e co-funtores.

4. Sejam R um anel comutativo com unidade e N um R-módulo à esquerda. Vimos na seção anterior que a aplicação abaixo está bem definida

$$\begin{aligned} F: \quad R\text{-Mod} &\longrightarrow R\text{-Mod} \\ M &\longmapsto M \otimes_R N \end{aligned}.$$

Dado $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(M, P)$, definimos também

$$\begin{aligned} F(\alpha) = \alpha \otimes 1: \quad M \otimes_R N &\longrightarrow P \otimes_R N \\ m \otimes n &\longmapsto \alpha(m) \otimes n \end{aligned}$$

que é um $\mathbb{Z}$-homomorfismo. Vamos mostrar que F é um funtor. Iniciamos verificando que $F(\alpha)$ é R-homomorfismo.
$F(\alpha)(r(m \otimes n)) = F(\alpha)(rm \otimes n) = \alpha(rm) \otimes n = (r\alpha(m)) \otimes n = r(\alpha(m) \otimes n) = rF(\alpha)(m \otimes n)$.

A igualdade $F(Id_M) = Id_{(F(M))}$ é evidente, para cada R-módulo M.

Sejam $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(M,P)$ e $\beta \in \mathrm{Hom}_R(P,Q)$. Para $m \otimes n \in M \otimes N$ temos $F(\beta \circ \alpha)(m \otimes n) = (\beta \circ \alpha)(m) \otimes n = F(\beta)(\alpha(m) \otimes n) = F(\beta)(F(\alpha)(m \otimes n)) = (F(\beta) \circ F(\alpha))(m \otimes n)$.

5. Argumentos análogos aos usados no exemplo anterior mostram que quando R é um anel com unidade, não necessariamente comutativo, e N é um R-módulo à esquerda então

$$\begin{aligned} F:\quad \text{Mod-}R &\longrightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod} \\ M &\longmapsto M \otimes_R N \end{aligned}$$

é um funtor. Se $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(M,P)$ então

$$\begin{aligned} F(\alpha):\quad M \otimes_R N &\longrightarrow P \otimes_R N \\ m \otimes n &\longmapsto \alpha(m) \otimes n \end{aligned}.$$

Definição 2.4.3. *Um morfismo $T \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(A,B)$ de uma categoria $\mathcal{M}$ é um isomorfismo, se existe um morfismo $L \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(B,A)$ tal que $T \circ L = Id_B$ e $L \circ T = Id_A$.*

Definição 2.4.4. *Sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ categorias. Dizemos que os funtores $F, G : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ são equivalentes, se para cada $A \in Obj(\mathcal{M})$, existe um isomorfismo $\mathcal{T}_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{N}}(F(A), G(A))$ tal que dado $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(A,B)$ vale $G(f) \circ \mathcal{T}_A = \mathcal{T}_B \circ F(f)$, isto é, o diagrama abaixo é comutativo*

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\mathcal{T}_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\mathcal{T}_B"] & G(B) \end{tikzcd}$$

Exemplo: Seja R um anel comutativo com unidade . Tome S um sistema multiplicativo, e considere os funtores

$$\begin{aligned} F:\quad R\text{-Mod} &\longrightarrow R\text{-Mod} \\ M &\longmapsto M \otimes_R S^{-1}R \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} G:\quad R\text{-Mod} &\longrightarrow R\text{-Mod} \\ M &\longmapsto S^{-1}M \end{aligned}.$$

Mostraremos que F e G são equivalentes. Seja M um R-módulo e defina $\varphi : M \times$

$S^{-1}R \longrightarrow S^{-1}M$ por $\varphi\left(m, \frac{r}{s}\right) = \frac{rm}{s}$. Desde que φ é R-tensorial, existe um único $\mathbb{Z}$-homomorfismo $\mathcal{T}_M : M \otimes S^{-1}R \longrightarrow S^{-1}M$ que torna o diagrama abaixo comutativo

$$\begin{tikzcd}
M \times S^{-1}R \arrow[d, "\mathcal{T}"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
M \otimes_R S^{-1}R \arrow[r, dotted, "\mathcal{T}_M"] & S^{-1}M
\end{tikzcd}$$

Segue que $\mathcal{T}_M\left(m \otimes \frac{r}{s}\right) = \mathcal{T}_M \circ \mathcal{T}\left(m, \frac{r}{s}\right) = \varphi\left(m, \frac{r}{s}\right) = \frac{rm}{s}$. Além disso, dados $u \in R$ e $m \otimes \frac{r}{s} \in M \otimes S^{-1}R$ temos

$$\mathcal{T}_M\left(u\left(m \otimes \frac{r}{s}\right)\right) = \mathcal{T}_M\left(um \otimes \frac{r}{s}\right) = \frac{r(um)}{s} = u\mathcal{T}_M\left(m \otimes \frac{r}{s}\right) .$$

Assim $\mathcal{T}_M$ é um R-homomorfismo e claramente é sobrejetor. Tome o R-homomorfismo

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_M' : \quad S^{-1}M &\longrightarrow M \otimes S^{-1}R \\ \tfrac{m}{s} &\longmapsto m \otimes \tfrac{1}{s} \end{aligned}$$

e note que dado $m \otimes \frac{r}{s} \in M \otimes S^{-1}R$, temos

$$(\mathcal{T}_M' \circ \mathcal{T}_M)\left(m \otimes \frac{r}{s}\right) = \mathcal{T}_M'\left(\frac{rm}{s}\right) = rm \otimes \frac{1}{s} = m \otimes \frac{r}{s} .$$

Desta forma, $\mathcal{T}_M$ é injetora, e então, $\mathcal{T}_M$ é um R-isomorfismo.
Para $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(A, B)$ temos

$$\begin{aligned} F(\alpha) = \alpha \otimes 1 : \quad A \otimes S^{-1}R &\longrightarrow B \otimes S^{-1}R \\ a \otimes \tfrac{r}{s} &\longmapsto \alpha(a) \otimes \tfrac{r}{s} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} S^{-1}\alpha : \quad S^{-1}A &\longrightarrow S^{-1}B \\ \tfrac{a}{s} &\longmapsto \tfrac{\alpha(a)}{s} \end{aligned}$$

Precisamos verificar que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd} A \otimes S^{-1}R \arrow[r, "\mathcal{T}_A"] \arrow[d, "\alpha \otimes 1"'] & S^{-1}A \arrow[d, "S^{-1}\alpha"] \\ B \otimes S^{-1}R \arrow[r, "\mathcal{T}_B"] & S^{-1}B \end{tikzcd}$$

Dado $a \otimes \frac{r}{s} \in A \otimes_R S^{-1}R$ temos

$$(S^{-1}\alpha)\left(\mathcal{T}_A\left(a \otimes \frac{r}{s}\right)\right) = (S^{-1}\alpha)\left(\frac{ra}{s}\right) = \frac{\alpha(ra)}{s} = \frac{r\alpha(a)}{s} = \mathcal{T}_B\left(\alpha(a) \otimes \frac{r}{s}\right) =$$

$$\mathcal{T}_B\left((\alpha \otimes 1)\left(a \otimes \frac{r}{s}\right)\right) .$$

Um caso particular e interessante do exemplo anterior, é quando R é um domínio comutativo e $S = R - \{0\}$. Sabemos que $K = S^{-1}R$ é o corpo de frações de R. Então, o exemplo mostra que $(\_) \otimes_R K$ e $S^{-1}(\_)$ são funtores equivalentes na categoria R-Mod . Usaremos este fato no último teorema deste capítulo.

Definição 2.4.5. *Seja F um funtor de R-Mod em S-Mod . Dizemos que F é um funtor exato, se para toda sequência exata curta de R-Mod $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ tivermos que $0 \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \longrightarrow 0$ é sequência exata de S-Mod .*

Exemplos:

1. É fácil ver que o funtor

$$\begin{aligned} F: \quad R\text{-Mod} &\longrightarrow R\text{-Mod} \\ A &\longmapsto S^{-1}A \end{aligned}$$

é exato.

2. Seja N um R-módulo à esquerda. Vimos na seção 3 que o funtor

$$\begin{aligned} F: \quad \text{Mod-}R &\longrightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod} \\ M &\longmapsto M \otimes_R N \end{aligned}$$

não é exato.

2.5 Módulos Injetivos e Projetivos

Definição 2.5.1. *Um R-módulo Q é injetivo se dado qualquer R-monomorfismo $f : A \longrightarrow B$ e qualquer R-homomorfismo $g : A \longrightarrow Q$, existe um R-homomorfismo $h : B \longrightarrow Q$ tal que $h_o f = g$*

A próxima proposição é uma ferramenta útil para verificar quando um módulo é injetivo. Na sua demonstração usamos o Lema de Zorn, cujo enunciado recordamos a seguir.

Lema 2.5.1 (Lema de Zorn). *Se F é um conjunto parcialmente ordenado e não vazio tal que cada cadeia em F tem uma cota superior em F, então F tem um elemento maximal.*

Proposição 2.5.1 (Critério de Baer). *Um R-módulo à direita Q é injetivo se, e somente se, dado um ideal à direita I de R e um R-homomorfismo $g : I \longrightarrow Q$ existe um R-homomorfismo $\overline{g} : R \longrightarrow Q$ tal que $g = \overline{g} \circ i$, sendo i a função inclusão de I em R.*

Demonstração: A primeira implicação é óbvia. Para a recíproca, considere um monomorfismo $f : N \longrightarrow M$ e um homomorfismo $g : N \longrightarrow Q$. Defina $g_1 : Im(f) \longrightarrow Q$ por $g_1(f(x)) = g(x)$. Note que g_1 está bem definida e é um R-homomorfismo. Tome $\mathcal{F} = \{(S,h) \,/\, Im(f) \leq S \leq M\,,\ h \in \mathrm{Hom}_R(S,Q) \text{ e } h|_{Im(f)} = g_1\}$. Note que $\mathcal{F} \neq \emptyset$, pois $(Im(f), g_1) \in \mathcal{F}$. Definimos em $\mathcal{F}$ a relação $(S_1, h_1) \leq (S_2, h_2)$ se, e somente se, $S_1 \subseteq S_2$ e $h_2 \mid_{S_1} = h_1$. Também é de fácil verificação que $\leq$ é relação de ordem em $\mathcal{F}$. Sejam $\{(S_i, h_i) \,/\, i \in I\}$ uma cadeia em $\mathcal{F}$ e $S = \bigcup_{i \in I} S_i$. É claro que $Im(f) \leq S \leq M$ e que $h : S \longrightarrow Q$ definida por $h(a) = h_i(a)$, quando $a \in S_i$, é um R-homomorfismo bem definido (independe de i) que estende g_1. Segue que $(S,h) \in \mathcal{F}$ e (S,h) é é cota superior para a família $\{(S_i, h_i \,/\, i \in I\}$. Pelo Lema 2.5.1, existe um elemento maximal $(\overline{S}, \overline{h})$ em $\mathcal{F}$. Vamos mostrar que $\overline{S} = M$. Suponha por absurdo, que $\overline{S} \lneqq M$. Seja $x_o \in (M - \overline{S})$ e considere o ideal à direita de R, $I = \{a \in R \,/\, x_o a \in \overline{S}\}$, e o R-homomorfismo $\varphi : I \longrightarrow Q$ definido por

$\varphi(a) = \overline{h}(x_o a)$. Temos então, o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\varphi"] & R \arrow[dl, dotted, "\overline{\varphi}"] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

Por hipótese, existe um R-homomorfismo $\overline{\varphi} : R \longrightarrow Q$ tal que $\overline{\varphi} \circ i = \varphi$. Chame $y_o = \overline{\varphi}(1)$. Assim, para $a \in I$ temos $\overline{h}(x_o a) = \varphi(a) = \overline{\varphi}(a) = \overline{\varphi}(1)a = y_o a$. Tome $\overline{S'} = \overline{S} + x_o R$, observando que $\overline{S} \subset \overline{S'}, \overline{S} \neq \overline{S'}$ pois $x_o \notin \overline{S}$, e defina $\overline{h'} : \overline{S'} \longrightarrow Q$ por $\overline{h'}(s + x_o r) = \overline{h}(s) + y_o r$. Vamos mostrar que $\overline{h'}$ está bem definida. Sejam $s_1 + x_o r_1, s_2 + x_o r_2 \in \overline{S'}$ e $s_1 + x_o r_1 = s_2 + x_o r_2$. Então $s_1 - s_2 = x_o(r_2 - r_1)$. Como $s_1 - s_2 \in \overline{S}$, vem que $r_2 - r_1 \in I$. Assim, $\overline{h}(s_1 - s_2) = \overline{h}(x_o(r_2 - r_1)) = y_o(r_2 - r_1)$, ou seja, $\overline{h}(s_1) + y_o r_1 = \overline{h}(s_2) + y_o r_2$. Portanto, $\overline{h'}$ está bem definida. Como $\overline{h'}$ é R-homomorfismo, $\overline{h'}|_{Im(f)} = g_1$ e $\overline{h'}|_{\overline{S}} = \overline{h}$, concluímos que $(\overline{S'}, \overline{h'}) \in \mathcal{F}$, e $(\overline{S}, \overline{h}) < (\overline{S'}, \overline{h'})$, o que contradiz a maximalidade de $(\overline{S}, \overline{h})$. Logo $\overline{S} = M$. Segue que, $\overline{h} : M \longrightarrow Q$ e dado $x \in N$ temos $\overline{h}(f(x)) = g_1(f(x)) = g(x)$. Desta forma, Q é injetivo.

□

Como consequência do Critério de Baer temos o seguinte resultado.

Corolário 2.5.1. *Se R é corpo então todo R-módulo é injetivo.*

Proposição 2.5.2. *Seja S um R-módulo. Se S é isomorfo a um somando direto de um R-módulo injetivo então S é injetivo.*

Demonstração: Sejam $f : M \longrightarrow N$ um R-monomorfismo e $g : M \longrightarrow S$ um R-homomorfismo. Por hipótese, existe um R-isomorfismo $\varphi : S_1 \longrightarrow S$ onde $S_1 \oplus L = Q$ e Q é injetivo. O R-isomorfismo $\psi : S_1 \oplus L \longrightarrow S \oplus L$ definido por $\psi(s_1 + l) = \varphi(s_1) + l$ garante que $Q_1 = S \oplus L$ é injetivo. Note também que a sequência $0 \longrightarrow L \xhookrightarrow{i} Q_1 \xrightarrow{\pi_1} S \longrightarrow 0$, $(\pi_1(s + l) = s$, i a função inclusão) é exata e cinde, com cisão $\pi_1' : S \longrightarrow Q_1$ dada por $\pi_1'(s) = s + 0$. Seja $g_1 : M \longrightarrow Q_1$, $g_1 = \pi_1' \circ g$. Como Q_1 é injetivo, existe um R-homomorfismo $\overline{g_1} : N \longrightarrow Q_1$ tal que $\overline{g_1} \circ f = g_1$. Finalmente, considere $\overline{g} : N \longrightarrow S$ dada por $\overline{g} = \pi_1 \circ \overline{g_1}$ e note que $\overline{g} \circ f = \pi_1 \circ \overline{g_1} \circ f = \pi_1 \circ g_1 = \pi_1 \circ \pi_1' \circ g = g$.

□

Corolário 2.5.2. *Sejam A e B R-módulos. Então $A \oplus B$ é injetivo se, e somente se, A e B são injetivos.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Considere a sequência exata cindida de R-módulos $A \oplus B \xrightarrow{\pi_1} A \longrightarrow 0$, com cisão π_1'. Assim, pelo Lema 2.1.1, $A \oplus B = \mathrm{Ker}(\pi_1) \oplus \pi_1'(A)$. Mas, $\pi_1'(A) \simeq A$, e então usando a Proposição 2.5.2, temos que A é injetivo. Analogamente, verifica-se que B é injetivo.

$(\Leftarrow)$ Sejam $f : P \longrightarrow Q$ um monomorfismo, $g : P \longrightarrow A \oplus B$ um homomorfismo, $\pi_1 : A \oplus B \longrightarrow A$ e $\pi_2 : A \oplus B \longrightarrow B$ as projeções naturais. Como A e B são injetivos, existem R-homomorfismos $q_1 : Q \longrightarrow A$ e $q_2 : Q \longrightarrow B$ tais que $q_1 \circ f = \pi \circ g$ e $q_2 \circ f = \pi_2 \circ g$. Defina $\psi : Q \longrightarrow A \oplus B$ por $\psi(x) = q_1(x) + q_2(x)$. É claro que ψ é R-homomorfismo e para cada $p \in P$, $(\psi \circ f)(p) = q_1(f(p)) + q_2(f(p)) = \pi_1(g(p)) + \pi_2(g(p)) = g(p)$.

□

Um dos principais resultados sobre módulos injetivos estabelece que todo módulo é isomorfo a um submódulo de um módulo injetivo da forma $Hom_{\mathbb{Z}}(R, G)$, onde G é um grupo abeliano divisível. Enunciamos abaixo este teorema que está provado em [5] pg.154, e que utilizaremos nos capítulos seguintes.

Teorema 2.5.1. *Seja M um R-módulo. Então existe um R-módulo injetivo Q tal que $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\psi} Q$ é sequência exata de R-módulos.*

Corolário 2.5.3. *Seja M um R-módulo. Então M é injetivo se, e somente se, toda sequência exata curta $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$ cinde.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Seja $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ uma sequência exata de R-módulos. Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "Id"'] & N \arrow[dl, dotted, "\overline{f}"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Por hipótese, existe $\overline{f} : N \longrightarrow M$ tal que $\overline{f} \circ f = Id_M$, ou seja, a sequência cinde.

$(\Leftarrow)$ Pelo Teorema 2.5.1, existe um R-módulo injetivo Q tal que $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\psi} Q$ é uma sequência exata. Tome a sequência exata $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\psi} Q \xrightarrow{\pi} \frac{Q}{\psi(M)} \longrightarrow 0$. Por hipótese, existe $\psi' : Q \longrightarrow M$ cisão de ψ. Assim, $Q = \psi(M) \oplus \mathrm{Ker}(\psi')$. Como $\psi(M) \simeq M$, segue da Proposição 2.5.2, que M é injetivo. □

Agora apresentaremos a definição de módulos projetivos.

Definição 2.5.2. *Um módulo P é projetivo se dado qualquer R-epimorfismo $f : A \longrightarrow B$ e qualquer R-homomorfismo $g : P \longrightarrow B$, existe um R-homomorfismo $h : P \longrightarrow A$ tal que $f_o h = g$*

Todo R-módulo livre é projetivo, conforme a Proposição 2.2.2.

2.6 Extensão Essencial, Submódulo Fechado e Fecho Injetivo

Definição 2.6.1. *Dados os R-módulos A e B com $A \leq B$, dizemos que B é uma extensão essencial de A se cada submódulo não nulo de B tem intersecção não nula com A. Dizemos também que A é um submódulo essencial de B e escrevemos $A \leq_e B$.*

Para garantir que $A \leq_e B$ basta verificar que todo submódulo cíclico não nulo de B tem intersecção não nula com A, já que todo submódulo não nulo contém um submódulo cíclico não nulo. Mas isto é equivalente a mostrar que todo elemento não nulo de B tem um múltiplo não nulo em A.
Exemplos:

1. $A_R \leq_e A_R$, para todo R-módulo A.

2. $\mathbb{Z}_\mathbb{Z} \leq_e \mathbb{Q}_\mathbb{Z}$.

Proposição 2.6.1. *(a) Se $A \leq B \leq C$, então $A \leq_e C$ se, e somente se, $A \leq_e B \leq_e C$.*

(b) Se $A \leq_e B \leq C$ e $A' \leq_e B' \leq C$, então $A \cap A' \leq_e B \cap B'$.

(c) Se $f : B \longrightarrow C$ é um homomorfismo de módulos e $A \leq_e C$, então $f^{-1}(A) \leq_e B$.

Demonstração: (a) Supor que $A \leq_e B \leq_e C$ e $M \leq C$, $M \neq 0$. Como $B \leq_e C$, temos que $B \cap M \neq \{0\}$. Mas $B \cap M \leq B$ e $A \leq_e B$, implicando que $(B \cap M) \cap A \neq \{0\}$. Assim, $M \cap A \neq \{0\}$ e então $A \leq_e C$. Por outro lado, se $A \leq_e C$, temos que cada submódulo não nulo de C tem intersecção não nula com A, e conseqüentemente com B. Portanto $B \leq_e C$. Seja $M \leq B$ e $M \neq 0$. Então $M \leq C$, e daí, $M \cap A \neq 0$.

Logo, $A \leq_e B$.

(b) Seja $M \leq (B \cap B')$, $M \neq 0$. Como $A \leq_e B$, temos que $M \cap A \neq \{0\}$. Mas $A' \leq_e B'$, logo $(M \cap A) \cap A' \neq \{0\}$, ou seja, $(A \cap A') \leq_e (B \cap B')$.

(c) Suponha que $f^{-1}(A)$ não é submódulo essencial de B. Então, existe $M \leq B$, $M \neq 0$ tal que $f^{-1}(A) \cap M = \{0\}$.Desta forma $A \cap f(M) = \{0\}$. Desde que $\mathrm{Ker}(f) \subseteq f^{-1}(A)$ temos $M \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. Assim f leva M isomorficamente em $f(M)$ e então $f(M)$ é um submódulo não nulo de C , o que é um absurdo, pois $A \leq_e C$.

□

Definição 2.6.2. *Seja A um submódulo de C. Um complemento relativo para A em C é um submódulo B de C que é maximal com respeito a propriedade $A \cap B = 0$.*

A existência do complemento relativo é assegurada pelo Lema de Zorn. Note ainda que se $A, B \leq C$ tais que $C = A \oplus B$, então B é um complemento relativo para A em C.

Proposição 2.6.2. *Seja $A \leq C$. Se B é um complemento relativo para A em C então $A \oplus B \leq_e C$.*

Demonstração: Como $A \cap B = 0$, temos $A + B = A \oplus B$. Suponha que $M \leq C$ tal que $M \cap (A \oplus B) = 0$. Então, temos $(A \oplus B) + M = (A \oplus B) \oplus M = A \oplus B \oplus M$. Assim, $A \cap (B \oplus M) = 0$. Da maximalidade de B, vem que $B \oplus M = B$. Logo $M = 0$, e portanto $A \oplus B \leq_e C$.

□

Definição 2.6.3. *Um submódulo A de um módulo C é chamado de submódulo fechado de C quando A não tem extensões essenciais próprias em C, isto é, se a única solução da relação $A \leq_e B \leq C$ é $B = A$.*

Lema 2.6.1. *Sejam $A, B \leq C$.*

(a) Se B é um complemento relativo para A em C então B é um submódulo fechado de C.

(b) Se B é um complemento relativo para A em C e $B \leq K \leq_e C$ então $\frac{K}{B} \leq_e \frac{C}{B}$.

Demonstração: (a) Suponha que $B \leq_e B' \leq C$. Note que $(B' \cap A) \cap B = B' \cap (A \cap B) = 0$, pois $A \cap B = 0$. Desde que $B \leq_e B'$ segue que $B' \cap A = 0$, e então pela maximalidade de B, temos $B' = B$.

(b) Seja $\frac{M}{B} \leq \frac{C}{B}$ tal que $\left(\frac{M}{B} \cap \frac{K}{B}\right) = 0$. Então, $M \cap K = B$. Como $K \leq_e C$, temos pela Proposição 2.6.1 (b) que $M \cap K \leq_e M \cap C$, isto é, $B \leq_e M$. Por (a), B é submódulo fechado de C, e então, $B = M$.

$\square$

Definição 2.6.4. *Um fecho injetivo para o R-módulo A é uma extensão minimal injetiva de A, isto é, um módulo injetivo E que contém A tal que cada monomorfismo $A \longrightarrow E'$, com E' injetivo, estende-se a um monomorfismo $E \longrightarrow E'$.*

Note que se A é um módulo injetivo então A é um fecho injetivo para A. Vamos verificar a existência de um fecho injetivo, para cada R-módulo A. Para isso, mostraremos alguns resultados auxiliares.

Lema 2.6.2. *Seja $f : A \longrightarrow E$ um R-monomorfismo, onde E é injetivo. Se $A \leq_e B$ então f estende-se para um monomorfismo $\overline{f} : B \longrightarrow E$.*

Demonstração: Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, dotted, "\overline{f}"] \\ E & \end{tikzcd}$$

sendo i a função inclusão. Como E é injetivo, existe um R-homomorfismo $\overline{f}$ tal que $\overline{f} \circ i = f$. Assim $\overline{f}$ é um R-homomorfismo que estende f. Além disso, $0 = \mathrm{Ker}(f) = A \cap \mathrm{Ker}(\overline{f})$. Como $A \leq_e B$, segue que $\mathrm{Ker}(\overline{f}) = 0$, ou seja, $\overline{f}$ é injetiva.

$\square$

Definição 2.6.5. *Um monomorfismo $f : A \longrightarrow B$ tal que $f(A) \leq_e B$ é chamado monomorfismo essencial. Se além disso tivermos $f(A) \neq B$, dizemos que f é uma extensão essencial própria.*

Proposição 2.6.3. *Um módulo A é injetivo se, e somente se, A não tem extensões essenciais próprias.*

Demonstração: Suponha que A é injetivo e considere $f : A \longrightarrow B$ um monomorfismo tal que $f(A) \leq_e B$. Assim, $f(A) \simeq A$, ou seja, $f(A)$ é injetivo. Tome a sequência exata $0 \longrightarrow f(A) \overset{i}{\hookrightarrow} B \xrightarrow{\pi} \frac{B}{f(A)} \longrightarrow 0$, sendo $\pi(b) = \bar{b}$, $\forall b \in B$. Pelo Corolário 2.5.3, temos que $B = f(A) \oplus C$, sendo $C = \mathrm{Ker}(i')$ onde i' é a cisão de i. Como $f(A) \leq_e B$, obtemos que $C = 0$, ou seja, $f(A) = B$. Por outro lado, suponha que A não é injetivo. Então pode-se provar usando o Teorema 2.5.1 e o Corolário 2.5.2 que existe um módulo C contendo A tal que A não é um somando direto de C. Seja B o complemento relativo de A em C. Então, pelo Lema 2.6.1 e pela Proposição 2.6.2, temos que $\frac{A \oplus B}{B} \leq_e \frac{C}{B}$. Considere as aplicações naturais $A \overset{i}{\hookrightarrow} C \xrightarrow{\pi} \frac{C}{B}$, e tome $f = \pi \circ i$. Como $A \cap B = 0$, segue que f é monomorfismo e, $f(A) = \frac{A \oplus B}{B} \leq_e \frac{C}{B}$. Visto que A não é somando direto de C, $A \oplus B < C$ e então $f(A) < \frac{C}{B}$. Assim $f(A)$ é uma extensão essencial própria de A.

□

Corolário 2.6.1. *Todo submódulo fechado de um módulo injetivo é injetivo.*

Demonstração: Sejam A um submódulo fechado de um módulo injetivo E e $f : A \longrightarrow B$ um monomorfismo tal que $f(A) \leq_e B$. De acordo com o Lema 2.6.2, o R-isomorfismo $f^{-1} : f(A) \longrightarrow A$ estende-se para um R-monomorfismo $g : B \longrightarrow E$. Desde que $g^{-1} : g(B) \longrightarrow B$ e $f(A) \leq_e B$, segue da Proposição 2.6.1 que $g(f(A)) \leq_e g(B)$, isto é, $A \leq_e g(B)$. Mas A é submódulo fechado de E, e daí, $g(B) = A$, ou seja, $B = f(A)$. Logo, A não tem extensões essenciais próprias. A Proposição 2.6.3, garante que A é injetivo.

□

Agora verifiquemos a existência do fecho injetivo.

Teorema 2.6.1. *Dado um R-módulo A, existe um R-módulo E contendo A tal que E é uma extensão minimal injetiva de A, no sentido da Definição 2.6.4 .*

Demonstração: Pelo Teorema 2.5.1, existe um módulo injetivo F que contém A. Seja $\mathcal{F} = \{T \ / \ A \leq_e T \leq F\}$ ordenado por inclusão. Note que $\mathcal{F} \neq \emptyset$, pois $A \in \mathcal{F}$. Dada uma cadeia em $\mathcal{F}$ da forma $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$, consideremos $K = \cup T_\alpha$. Assim K é um R-módulo, $K \leq F$, $A \leq_e K$ e K é uma cota superior deste subconjunto em $\mathcal{F}$. Pelo Lema de Zorn, existe um submódulo E de F com $A \leq_e E$ e E elemento maximal de $\mathcal{F}$. Por outro lado, qualquer extensão essencial de E dentro de F é também uma extensão essencial de A. Da maximalidade de E, segue que, E não possui extensões essenciais próprias dentro de $\mathcal{F}$. Assim, E é um submódulo fechado de $\mathcal{F}$. Pelo Corolário 2.6.1, temos que E é injetivo. Do Lema 2.6.2, vem que, qualquer monomorfismo $A \longrightarrow E'$ com E' injetivo estende-se para um monomorfismo $E \longrightarrow E'$, visto que, $A \leq_e E$.

□

Proposição 2.6.4. *Seja A um R-módulo.*

(a) Se E é um módulo injetivo contendo A, então E é um fecho injetivo de A se, e somente se, $A \leq_e E$.

(b) Se E e E' são ambos fechos injetivos de A, então a função identidade em A estende-se para um isomorfismo de E em E'.

Demonstração: (a) Se $A \leq_e E$, segue do Lema 2.6.2, que E é um fecho injetivo de A. Por outro lado, assuma que E é um fecho injetivo de A. Pelo Teorema 2.6.1, existe um módulo E' que é um fecho injetivo de A tal que $A \leq_e E'$. Por definição, a função inclusão $A \hookrightarrow E'$ deve estender-se para um monomorfismo $f : E \longrightarrow E'$. Como f é um monomorfismo, segue da Proposição 2.6.1, que $f^{-1}(A) = A \leq_e E$.
(b) Por definição, a função inclusão $A \hookrightarrow E'$ estende-se para um monomorfismo $f : E \longrightarrow E'$. Nós temos $A = f(A) \leq f(E) \leq E'$ e $A \leq_e E'$ por (a). Assim, pela Proposição 2.6.1, $f(E) \leq_e E'$. De acordo com a Proposição 2.6.3, E não tem extensões essenciais próprias. Logo, $f(E) = E'$, ou seja, f é um isomorfismo.

□

A Proposição 2.6.4, nos diz que o fecho injetivo de um módulo é único a menos de isomorfismo. Assim, dado um R-módulo A usaremos a notação $\mathcal{E}(A)$ para designar o fecho injetivo de A.

Usando a primeira parte da proposição acima, é fácil ver que $\mathcal{E}(n\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$, para $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$.

Definição 2.6.6. *Dado um R-módulo A, a soma de todos os submódulos simples de A é chamado socle de A e denotado por $soc(A)$. O módulo A é dito semi-simples se $soc(A) = A$.*

É possível provar que R_R é semi-simples se, e somente se, ${}_RR$ é semi-simples, olhe [10], pg.29. Assim, diremos que o anel R é semi-simples quando R_R é semi-simples.

Observe que (0) é um módulo semi-simples e que todo módulo simples é semi-simples. Note também que todo anel de divisão é um anel semi-simples.

Lema 2.6.3. *Seja C um R-módulo.*

(a) Se C é semi-simples então C não tem submódulos essenciais próprios.

(b) Se todo submódulo de C é um somando direto de C então C é semi-simples.

Demonstração: (a) Se A é um submódulo próprio de C então existe um submódulo simples M de C tal que $M \not\leq A$, visto que, C é semi-simples. Então, $M \cap A \neq M$. Como M é simples, $M \cap A = 0$. Portanto, $A \not\leq_e C$.
(b) Por hipótese, podemos escrever $C = soc(C) \oplus A$ para algum R-módulo A. Vamos mostrar que $A = 0$. Suponha, por absurdo, que existe $x \in A$, $x \neq 0$ e considere o conjunto $J = \{r \in R \mid xr = 0\}$ que é um ideal à direita próprio de R. Considere também, o homomorfismo $f : R \longrightarrow xR$ dado por $f(r) = xr$. Pelo teorema do homomorfismo, $\frac{R}{J} \simeq xR$. Seja M um ideal à direita maximal de R tal que $J \subseteq M$. É fácil ver também que $\frac{M}{J} \simeq xM$ e então $\frac{xR}{xM} \simeq \frac{R}{M}$. A maximalidade de M nos garante que $\frac{R}{M}$ é simples. Por hipótese, xM é um somando direto de C, e então de xR. Conseqüentemente, $xR = B \oplus xM$ para algum R-módulo B. Desta forma, $B \simeq \frac{xR}{xM}$ e como $\frac{xR}{xM}$ é simples, segue que B é simples e portanto $B \leq soc(C)$. Por outro lado, como $x \in A$ vem que $B \leq xR \leq A$. Assim $0 \neq B \subseteq A \cap soc(C) = 0$, o que é impossível.

$\square$

A seguir apresentaremos algumas propriedades de anéis semi-simples que serão utilizadas no decorrer do trabalho, e cujas demonstrações podem ser vistas em [1]. Antes porém lembramos as definições de anel noetheriano e artiniano.

Definição 2.6.7. *Um R-módulo M é noetheriano (artiniano) se o conjunto dos seus submódulos, ordenados por inclusão, satisfaz a condição das cadeias ascendentes (a condição das cadeias descendentes). Um anel R é noetheriano à direita (à esquerda) quando R_R (${}_RR$) é um módulo noetheriano. Dizemos que R é anel noetheriano quando R é anel noetheriano à esquerda e à direita. Analogamente definimos anel artiniano.*

Teorema 2.6.2. *Se R é um anel semi-simples então:*

(a) Todos R-módulos são projetivos.

(b) Todos R-módulos são injetivos.

(c) R é anel noetheriano.

(d) R é anel artiniano.

2.7 Propriedades da Localização Comutativa

Vamos apresentar nesta seção algumas das propriedades da localização de um domínio comutativo R segundo o sistema multiplicativo $S = R^*$. Antes porém, definiremos alguns conceitos necessários.

Definição 2.7.1. *O anel R é regular(von Neumann) se para cada $a \in R$ existe $x \in R$ tal que $axa = a$.*

Definição 2.7.2. *Sejam R um domínio comutativo e A um R-módulo. O conjunto $T(A) = \{a \in A \ / \ ar = 0 \ \text{para algum} \ r \in R^*\}$ é um submódulo de A, e é chamado de submódulo de torção de A.*

Definição 2.7.3. *O anel R é auto-injetivo à direita (à esquerda) quando R_R $({}_RR)$ é injetivo.*

Teorema 2.7.1. *Sejam R um domínio comutativo, $S = R^*$ e $K = S^{-1}R$. Então:*

(a) K é o corpo de frações de R.

(b) $S^{-1} : \text{Mod-}R \longrightarrow \text{Mod-}R$ é um funtor exato.

(c) Se A é um R-módulo à direita (à esquerda) então $S^{-1}A = \mathcal{E}\left(\frac{A}{T(A)}\right)$.

(d) $T(K) = 0$ e $T\left(\frac{A}{T(A)}\right) = 0$ para todo R-módulo A.

(e) K é anel regular.

(f) K é anel auto-injetivo.

(g) K é anel semi-simples.

(h) S^{-1} e $(\_) \otimes_R K$ são funtores equivalentes na categoria $\text{Mod-}R$.

(i) K é um R-módulo plano.

Demonstração: Os itens (e) e (g) são triviais. O item (a) já foi observado no primeiro capítulo. Os itens (b) e (h) foram vistos na seção 2.4 e (f) segue do Corolário 2.5.1. (c) Seja A um R-módulo à direita. Definimos $\varphi : A \longrightarrow S^{-1}A$ por $\varphi(a) = \frac{a}{1}$. que é um R-homomorfismo com $\text{Ker}(\varphi) = T(A)$. Pelo teorema do homomorfismo, $\frac{A}{T(A)} \simeq \varphi(A)$. Note que $\varphi(A) \leq_e S^{-1}A$ pois, dado $0 \neq \frac{a}{s} \in S^{-1}A$ temos $\frac{a}{s} \cdot s = \frac{a}{1} \in \varphi(A)$ e $\frac{a}{1} \neq 0$. Verifiquemos também que $S^{-1}A$ é R-módulo injetivo.

Para tanto, seja J ideal de R e $\varphi : J \longrightarrow S^{-1}A$ um R-homomorfismo. Considerando $S^{-1}\varphi : S^{-1}J \longrightarrow S^{-1}(S^{-1}A) = S^{-1}A$ definido por $S^{-1}\varphi(\frac{x}{s}) = \frac{\varphi(x)}{s}$ temos que $S^{-1}J$ é ideal de $S^{-1}R$ e $S^{-1}\varphi$ é um $S^{-1}R$-homomorfismo. Desde que $K = S^{-1}R$ é corpo, segue do Corolário 2.5.1 que $S^{-1}A$ é $S^{-1}R$-módulo injetivo. Pelo Critério de Baer, existe $\psi : S^{-1}R \longrightarrow S^{-1}A$ um $S^{-1}R$-homomorfismo que é extensão de $S^{-1}\varphi$. Consideremos então o R-homomorfismo $\overline{\psi} : R \longrightarrow S^{-1}A$, $\overline{\psi} = \psi|_R$. Dado $a \in J$, vem que, $\overline{\psi}(a) = \psi\left(\frac{a}{1}\right) = (S^{-1}\varphi)\left(\frac{a}{1}\right) = \frac{\varphi(a)}{1} = \varphi(a)$. Assim, $\overline{\psi}\,|_J = \varphi$. Novamente pelo Critério de Baer temos que $S^{-1}A$ é R-módulo injetivo. Portanto $S^{-1}A = \mathcal{E}(\varphi(A))$, ou seja, $S^{-1}A = \mathcal{E}\left(\frac{A}{T(A)}\right)$.

(d) É claro que $T(K) = 0$, pois K é corpo. Seja A um R-módulo. Consideremos o módulo quociente $\frac{A}{T(A)}$. Temos

$$T\left(\frac{A}{T(A)}\right) = \left\{\overline{a} \in \frac{A}{T(A)} \;/\; \overline{a}r = 0, \text{ para algum } r \in R^*\right\} .$$

Note que, $\overline{a}r = 0 \Leftrightarrow \overline{ar} = 0 \Leftrightarrow ar \in T(A)$. Então, $\overline{a}r = 0$ se, e somente se, existe $s \in S$ tal que $a(rs) = 0$. Como $rs \in S$, segue que, $a \in T(A)$, ou seja, $\overline{a} = 0$.

(i) Seja $\varphi : A \longrightarrow B$ um monomorfismo de R-módulos à direita e $\varphi \otimes 1 : A \otimes_R S^{-1}R \longrightarrow B \otimes S^{-1}R$ definido por $\varphi \otimes 1(a \otimes k) = \varphi(a) \otimes k$ o $\mathbb{Z}$-homomorfismo induzido. Vimos na seção 2.4 que $f : A \otimes_R S^R \longrightarrow S^{-1}A$, $f(a \otimes \frac{r}{s}) = \frac{ar}{s}$ e $g : B \otimes_R S^{-1}R \longrightarrow S^{-1}B$, $g(b \otimes \frac{r}{s}) = \frac{br}{s}$ são R-isomorfismos. Consideremos agora o R-homomorfismo $S^{-1}\varphi : S^{-1}A \longrightarrow S^{-1}B$, $S^{-1}\varphi(\frac{a}{s}) = \frac{\varphi(a)}{s}$ que é injetor, pois φ é injetora.

O diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_R S^{-1}R \arrow[r, "f"] \arrow[d, dotted, "\varphi \otimes 1"'] & S^{-1}A \arrow[d, "S^{-1}\varphi"] \\
B \otimes_R S^{-1}R & S^{-1}B \arrow[l, "g^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

é comutativo, ou seja, $\varphi \otimes 1 = g^{-1} \circ S^{-1}\varphi \circ f$. Além disso, g^{-1}, $S^{-1}\varphi$ e f são injetoras. Portanto $\varphi \otimes 1$ é injetora, isto é, $S^{-1}R = K$ é R-módulo plano.

$\square$

Capítulo 3

Teorias de Torção

Desenvolvemos neste capítulo alguns tópicos relacionados com teoria de torção. Nosso objetivo é apresentar uma construção geral para módulos quocientes. No próximo capítulo trabalharemos com um caso particular dessa construção, para produzir um funtor localização em módulos sobre anéis não comutativos. Fixemos as seguintes notações: R é anel com unidade, Mod-R é a categoria dos R-módulos à direita e $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ é o conjunto dos R-homomorfismos de M em N.

3.1 Radical e Teoria de Torção

Definição 3.1.1. *Uma função objeto T : Mod-$R \longrightarrow$ Mod-R é chamado um radical se para $M, N \in$ Mod-R vale:*

i. $T(M) \leq M$,

ii. $f(T(M)) \leq T(N)$, *para todo* $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$,

iii. $T\left(\frac{M}{T(M)}\right) = 0$.

Exemplos:

(1) Seja $\mathcal{L}(R) = \{I \leq_e R \;/\; I$ ideal à direita de $R\}$, isto é, $\mathcal{L}(R)$ é o conjunto dos ideais essencias à direita de R. Considere Z : Mod-$R \longrightarrow$ Mod-R que a cada R-módulo M associa $Z(M) = \{m \in M \;/\; mI = 0$ para algum $I \in \mathcal{L}(R)\}$. É fácil ver que $Z(M) \in$ Mod-R. Vamos verificar que quando $Z(R_R) = 0$, Z é um radical:
(i) É de rápida verificação que $Z(M) \leq M$.
(ii) Sejam $M, N \in$ Mod-R e $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$. Tome $y \in f(Z(M))$. Então

$y = f(m)$ e existe $I \in \mathcal{L}(R)$ tal que $mI = 0$. Assim, $yI = f(m)I = f(mI) = 0$, ou seja, $y \in Z(N)$.
(iii) A demonstração de que $Z\left(\frac{M}{Z(M)}\right) = 0$ para todo R-módulo M será feita no próximo capítulo, na Proposição 4.1.1.

(2) Seja P um ideal primo do anel comutativo R e $S = R - P$ um sistema multiplicativo de R. Dado um R-módulo M, considere $T_1(M) = \{m \in M \ / \ ms = 0$ para algum $s \in S\}$. Quando R é comutativo, verifica-se facilmente que $T_1(M) \leq M$. Nesse caso, podemos considerar a função objeto

$$\begin{aligned} T_1 : \quad \text{Mod-}R &\longrightarrow \text{Mod-}R \\ M &\longmapsto T_1(M) \end{aligned}$$

Vamos verificar que T_1 é um radical:
(i) É de rápida verificação que $T_1(M) \leq M$.
(ii) Sejam $M, N \in$ Mod-R e $f \in \text{Hom}_R(M, N)$. Tome $y \in f(T_1(M))$. Então existe $m \in T_1(M)$ tal que $f(m) = y$. Como $m \in T_1(M)$, existe $s \in S$ tal que $ms = 0$. Assim, $ys = f(m)s = f(ms) = 0$, ou seja, $y \in T_1(N)$.
(iii) Seja $\overline{m} \in T_1\left(\frac{M}{T_1(M)}\right)$. Então existe $s \in S$ tal que $\overline{m}s = 0$, ou seja, $\overline{ms} = 0$. Assim, $ms \in T_1(M)$. Portanto existe $t \in S$ tal que $(ms)t = 0$, ou equivalentemente, $m(st) = 0$. Como $st \in S$, segue que $m \in T_1(M)$, ou seja, $\overline{m} = 0$.
Em particular, quando R é domínio comutativo e $P = \{0\}$ temos que T : Mod-$R \longrightarrow$ Mod-R, onde $T(M)$ é o submódulo de torção de M, é um radical.

(3) Dados $M_R \leq N_R$, dizemos que N é extensão racional de M desde que $\text{Hom}_R\left(\frac{A}{M}, N\right) = 0$ para todo $M \leq A \leq N$. Neste caso, escrevemos $M \leq_r N$. Seja $\mathcal{L}_r(R) = \{I \leq_r R \ / \ I$ é ideal à direita de $R\}$. Definimos

$$\begin{aligned} T_r : \quad \text{Mod-}R &\longrightarrow \text{Mod-}R \\ M &\longmapsto T_r(M) \end{aligned}$$

sendo $T_r(M) = \{x \in M \ / \ xI = 0$, para algum $I \in \mathcal{L}_r(R)\}$.

Vamos verificar que T_r é um radical:
(i) Pode-se provar que $\mathcal{L}(R)$ é fechado por intersecções, e que para $r \in R$ e $I \in \mathcal{L}(R)$ o conjunto $\{x \in R \ / \ rx \in I\} \in \mathcal{L}(R)$. Disso prova-se que $T_r(M) \leq M$
(ii) Sejam $M, N \in$ Mod-R, $f \in \text{Hom}_R(M, N)$ e $y \in f(T_r(M))$. Então existe

$x \in T_r(M)$ tal que $y = f(x)$. Como $x \in T_r(M)$, existe $I \in \mathcal{L}_r(R)$ tal que $xI = 0$. Portanto, $0 = f(xI) = f(x)I = yI$, ou seja, $y \in T_r(N)$.

(iii) Está assegurado em [10], pg.61.

Definição 3.1.2. *Um radical* T : Mod-$R \longrightarrow$ Mod-R *tal que* $T(T(M)) = T(M)$, *para todo* R*-módulo* M, *é chamado de radical idempotente.*

Seja T um radical idempotente e consider as classes de módulos $\mathcal{J}_T = \{M \ / \ T(M) = M\}$ e $\mathcal{F}_T = \{M \ / \ T(M) = 0\}$. Neste caso, dizemos que o par $(\mathcal{J}_T, \mathcal{F}_T)$ é uma teoria de pré-torção.

Todos os radicais apresentados acima são idempotentes. Assim, a cada radical exemplificado acima, podemos associar uma teoria de pré-torção.

Definição 3.1.3. *Um radical* T : Mod-$R \longrightarrow$ Mod-R *tal que* $M \cap T(N) = T(M)$, *sempre que* $M \subseteq N$, *é chamado de radical de torção. Dizemos também que* $T(M)$ *é submódulo de torção do* R*-módulo* M.

Seja T um radical de torção e considere novamente as classes de módulos $\mathcal{J}_T$ e $\mathcal{F}_T$ definidas acima. Dizemos agora que o par $(\mathcal{J}_T, \mathcal{F}_T)$ é uma teoria de torção. Os elementos de $\mathcal{J}_T$ são chamados módulos de torção, enquanto os elementos de $\mathcal{F}_T$ são chamados módulos livres de torção.

Note que todo radical de torção é um radical idempotente. De fato, seja T um radical de torção e $M \in$ Mod-R. Então, $T(M) \subseteq M$, e como T é radical de torção vem que $T(M) \cap T(M) = T(T(M))$. Assim, $T(M) = T(T(M))$ $\forall M \in$ Mod-R, e portanto, T é um radical idempotente.

Desta forma, concluímos que cada teoria de torção é uma teoria de pré-torção.

É de rápida verificação que todos os radicais exemplificados nesta seção são radicais de torção.

Na próxima seção, faremos a construção do módulo quociente de um módulo dado, relativo a uma teoria de torção fixada. Para isso usaremos o seguinte lema:

Lema 3.1.1. *Se* $(\mathcal{J}_T, \mathcal{F}_T)$ *é uma teoria de torção então* T' : Mod-$R \longrightarrow \mathcal{F}_T$ *dada por* $T'(M) = \frac{M}{T(M)}$ *é um funtor.*

Demonstração: Claramente a função acima está bem definida, pois T é um radical e então $T\left(\frac{M}{T(M)}\right) = 0$, ou seja, $T'(M) \in \mathcal{F}_T$. Dado $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ definimos $T'(f) : \frac{M}{T(M)} \longrightarrow \frac{N}{T(N)}$ por $T'(f)(\overline{m}) = \overline{f(m)}$. Note que se $\overline{m} = \overline{n}$ então

$m - n \in T(M)$. Assim $f(m) - f(n) \in T(N)$, pois T é radical. Desta forma, $\overline{f(m)} = \overline{f(n)}$, ou seja, $T'(f)$ está bem definida. É imediato que $T'(f)$ é um R-homomorfismo e que $T'(Id_M) = Id_{T'(M)}$. Além disso, dados $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$, $g \in \mathrm{Hom}_R(N, P)$ e $\overline{m} \in \frac{M}{T(M)}$ temos $(T'(g \circ f)(\overline{m}) = \overline{g(f(m))} = T'(g)\overline{(f(m))} = T'(g)(T'(f)(\overline{m})) = (T'(g) \circ T'(f))\,(\overline{m})$.

□

3.2 Módulo Quociente

Nesta seção, apresentaremos a definição de módulo quociente relativo a uma teoria de torção dada. Para isso, usaremos o conceito de fecho divisível de um módulo.

Definição 3.2.1. *Um reticulado é um conjunto parcialmente ordenado L tal que existe o ínfimo e o supremo de qualquer subconjunto de L com dois elementos. Um reticulado completo é um conjunto parcialmente ordenado L tal que existe o supremo e o ínfimo de qualquer subconjunto de L.*

Dado um módulo M_R considere o conjunto dos seus R-submódulos $L(M) = \{N \subseteq M \ / \ N \text{ é submódulo de } M\}$. Então, com a relação de inclusão, $L(M)$ é um reticulado completo.

Definição 3.2.2. *Seja L um reticulado completo. Um operador fecho em L é uma função $\Phi : L \longrightarrow L$, que para cada $a \in L$ associa $\Phi(a) = a^c$, tal que:*

i. $a \leq b \Rightarrow a^c \leq b^c$

ii. $a \leq a^c$

iii. $(a^c)^c = a^c$.

Seja $(\mathcal{J}_T, \mathcal{F}_T)$ uma teoria de pré-torção. Para cada R-módulo M consideremos o reticulado completo $L(M) = \{N \subseteq M \ / \ N \text{ é submódulo de } M\}$. Dado $N \in L(M)$, seja $C(N)$ um submódulo de M contendo N tal que $\frac{C(N)}{N} = T\left(\frac{M}{N}\right)$. Note que a existência e unicidade do módulo $C(N)$ é assegurada pelo 2º teorema do homomorfismo, já que $T\left(\frac{M}{N}\right) \leq \frac{M}{N}$.

Se $C(N) = N$, dizemos que N é fechado em M relativamente a teoria de pré-torção dada. Quando $C(N) = M$, dizemos que N é denso em M.

Com a notação acima, temos o seguinte lema:

Lema 3.2.1. *A função*

$$C: \begin{array}{l} L(M) \longrightarrow L(M) \\ N \longmapsto C(N) \end{array}$$

é um operador fecho em $L(M)$.

Demonstração: Vamos verificar as três condições da Definição 3.2.2.
(i) Sejam $N \subseteq N_1$, $N, N_1 \in L(M)$. Considere o R-homomorfismo $i : \frac{M}{N} \longrightarrow \frac{M}{N_1}$ dado por $i(x+N) = x + N_1$ que está bem definido pois $N \subseteq N_1$. Temos então, $i\left(T\left(\frac{M}{N}\right)\right) \subseteq T\left(\frac{M}{N_1}\right)$, ou seja, $i\left(\frac{C(N)}{N}\right) \subseteq \frac{C(N_1)}{N_1}$. Assim, dado $x \in C(N)$ temos $x + N_1 = i(x+N) \in \frac{C(N_1)}{N_1}$. Portanto, $x \in C(N_1)$.
(ii) Por construção, dado $N \in$ Mod-R temos $N \subseteq C(N)$.
(iii) Temos que $\frac{C(N)}{N} = T\left(\frac{M}{N}\right)$, sendo $N \leq C(N) \leq M$. Mas

$$\frac{M}{C(N)} \simeq \frac{\frac{M}{N}}{\frac{C(N)}{N}} = \frac{\frac{M}{N}}{T\left(\frac{M}{N}\right)}.$$

Como T é um radical segue que, $T\left(\frac{M}{C(N)}\right) = 0$. Assim, $\frac{C(C(N))}{C(N)} = T\left(\frac{M}{C(N)}\right) = 0$, ou seja, $C(C(N)) = C(N)$.

□

Definição 3.2.3. *Sejam $(\mathcal{J}_T, \mathcal{F}_T)$ uma teoria de torção e $M \in$ Mod-R. Dizemos que M é divisível quando $\frac{\mathcal{E}(M)}{M}$ é livre de torção.*

Note que se M é injetivo então $\frac{\mathcal{E}(M)}{M} = 0$. Assim, todo módulo injetivo é divisível em qualquer teoria de torção.

Considere uma teoria de torção associada a um radical de torção T. Para cada $M \in$ Mod-R temos $M \leq \mathcal{E}(M)$ e então podemos encontrar um fecho para M em $\mathcal{E}(M)$ usando o operador do Lema 3.2.1, e o denotaremos por $D(M)$. Desta forma, $M \leq D(M) \leq \mathcal{E}(M)$ e $\frac{D(M)}{M} = T\left(\frac{\mathcal{E}(M)}{M}\right)$.

Proposição 3.2.1. *A extensão $M \leq D(M)$ considerada acima possui as seguintes propriedades:*

(a) $M \leq_e D(M)$.

(b) $\frac{D(M)}{M}$ *é módulo de torção.*

(c) $D(M)$ *é módulo divisível.*

Demonstração: (i) Note que $M \leq D(M) \leq \mathcal{E}(M)$ e $M \leq_e \mathcal{E}(M)$. Pela Proposição 2.6.1, $M \leq_e D(M)$.
(ii) Como $\frac{D(M)}{M} = T\left(\frac{\mathcal{E}(M)}{M}\right)$ então

$$T\left(\frac{D(M)}{M}\right) = T\left(T\left(\frac{\mathcal{E}(M)}{M}\right)\right) = T\left(\frac{\mathcal{E}(M)}{M}\right) = \frac{D(M)}{M}.$$

Assim $\frac{D(M)}{M}$ é um módulo de torção.
(iii) Temos $M \leq D(M) \leq \mathcal{E}(M)$. Então $\mathcal{E}(M) \leq \mathcal{E}(D(M)) \leq \mathcal{E}(\mathcal{E}(M)) = \mathcal{E}(M)$, ou seja, $\mathcal{E}(D(M)) = \mathcal{E}(M)$. Desta forma, $\frac{\mathcal{E}(D(M))}{D(M)} = \frac{\mathcal{E}(M)}{D(M)}$. Mas

$$\frac{\mathcal{E}(M)}{D(M)} \simeq \frac{\frac{\mathcal{E}(M)}{M}}{\frac{D(M)}{M}} = \frac{\frac{\mathcal{E}(M)}{M}}{T\left(\frac{\mathcal{E}(M)}{M}\right)}.$$

Portanto, $T\left(\frac{\mathcal{E}(M)}{D(M)}\right) = 0$. Segue então, que $D(M)$ é um módulo divisível.

□

Definição 3.2.4. *O módulo $D(M)$ construído acima é chamado de fecho divisível de M.*

A função objeto D : Mod-$R \longrightarrow$ Mod-R que para cada $M \in$ Mod-R associa $D(M)$, em geral, não é um funtor. Um contra-exemplo pode ser visto em [9], pg.11. Porém a restrição de D a categoria $\mathcal{F}_T$ é um funtor como provaremos abaixo.

Lema 3.2.2. *Seja $\mathcal{A} = \{M \in \mathcal{F}_T \,/ M$ é divisível$\}$. Então $D : \mathcal{F}_T \longrightarrow \mathcal{A}$ que associa a cada $M \in \mathcal{F}_T$ o R-módulo $D(M)$ é um funtor.*

Demonstração: Vamos provar inicialmente que D está bem definida. De fato, $D(M)$ é divisível conforme a Proposição 3.2.1 (c). Sendo T um radical de torção e $M \leq D(M)$ temos $M \cap T(D(M)) = T(M) = 0$. Além disso, $T(D(M)) \leq D(M)$ e $M \leq_e D(M)$. Desta forma, $T(D(M)) = 0$, ou seja, $D(M) \in \mathcal{F}_T$. Seja $f : M \longrightarrow N \subseteq D(N)$ um R-homomorfismo. Como $\frac{D(M)}{M}$ é de torção, f possui uma extensão $D(f) : D(M) \longrightarrow D(N)$ como está provado em [9], pg.8. Vamos provar que esta extensão é única. Dado $\psi \in \mathrm{Hom}_R\left(\frac{D(M)}{M}, D(N)\right)$ temos $\psi\left(\frac{D(M)}{M}\right) = \psi\left(T\left(\frac{D(M)}{M}\right)\right) \leq T(D(N)) = 0$, ou seja, $\psi = 0$. Portanto, $\mathrm{Hom}_R\left(\frac{D(M)}{M}, D(N)\right) = 0$ quando $M, N \in \mathcal{F}_T$. Sejam $g, h \in \mathrm{Hom}_R(D(M), D(N))$ e $g|_M = h|_M$. Considere a sequência exata $0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} D(M) \xrightarrow{\pi} \frac{D(M)}{M} \longrightarrow 0$.

Então $\mathrm{Hom}_R\left(\frac{D(M)}{M}, D(N)\right) \xrightarrow{\pi'} \mathrm{Hom}_R(D(M), D(N)) \xrightarrow{i'} \mathrm{Hom}_R(M, D(N))$, sendo $i'(\alpha) = \alpha \circ i$, é uma sequência exata de $\mathbb{Z}$-módulos. Como $\mathrm{Hom}_R\left(\frac{D(M)}{M}, D(N)\right) = 0$ vem que i' é injetora. Por outro lado, se $g|_M = h|_M$ então $i'(g) = i'(h)$. Da injetividade de i' temos $g = h$. Da unicidade da extensão verificada acima, segue que $D(Id_M) = Id_{D(M)}$ para cada $M \in \mathcal{F}_T$ e $D(g \circ f) = D(g) \circ D(f)$ para $f : M \longrightarrow N$ e $g : N \longrightarrow P$.

$\square$

Compondo o funtor T' do Lema 3.1.1 com o funtor D do lema acima obtemos um funtor Q : Mod-$R \longrightarrow \mathcal{A}$ dado por $Q(M) = D\left(\frac{M}{T(M)}\right)$.

Definição 3.2.5. *O módulo $Q(M)$ construído acima é chamado módulo quociente de M relativo ao radical de torção T, e Q é chamado de funtor quociente relativo a teoria de torção dada.*

Outras construções para Q podem ser encontradas na literatura, como por exemplo, em [12].

A partir desse momento, nosso objetivo é trabalhar com o radical de torção Z. Faremos no próximo capítulo a construção do módulo quociente relativo ao radical de torção Z.

Capítulo 4

Localização Não Comutativa

No capítulo anterior associamos a cada radical de torção um funtor quociente. Agora estudaremos particularmente o radical de torção Z e seu funtor quociente, que denotaremos por S^o.

Nosso objetivo é obter condições necessárias e suficientes, impostas a um anel com unidade R, de forma que S^oR seja um anel quociente clássico à direita para R. Além disso, desejamos que S^oR tenha propriedades análogas às listadas no Teorema 2.7.1, de forma que tal construção generalize àquelas feitas no capítulo 1.

4.1 Localização não comutativa

Nessa seção definiremos S^oA para um R-módulo A. Verificaremos que S^oA é um R-módulo não singular e que $S^oA = Q(A)$, é o módulo quociente associado ao radical de torção Z.

Dado um anel R, vimos na seção 3.1 que $\mathcal{L}(R)$ é o conjunto dos ideais essenciais à direita de R. Apresentamos a seguir algumas propriedades de $\mathcal{L}(R)$, as quais são verificadas facilmente usando a Proposição 2.6.1:

(a) $R \in \mathcal{L}(R)$.

(b) Se $I \leq J \leq R_R$ e $I \in \mathcal{L}(R)$ então $J \in \mathcal{L}(R)$.

(c) Se $I, J \in \mathcal{L}(R)$ então $I \cap J \in \mathcal{L}(R)$.

(d) Se $I \in \mathcal{L}(R)$, $r \in R$ então $r^{-1}I = \{x \in R \ / \ rx \in I\} \in \mathcal{L}(R)$.

Definição 4.1.1. *Dado um R-módulo à direita A, consideremos como na seção 3.1, o conjunto $Z(A) = \{x \in A \,/\, xI = 0,$ para algum $I \in \mathcal{L}(R)\}$ que é submódulo de A. O submódulo $Z(A)$ é chamado submódulo singular de A.*

Analogamente definimos o submódulo singular de um R-módulo à esquerda B.

Definição 4.1.2. *Um R-módulo à direita (ou esquerda) A é um módulo singular quando $Z(A) = A$ e é um módulo não singular se $Z(A) = 0$.*

Considerando R como um R-módulo à direita, vemos que $Z(R)$ é um ideal bilateral de R, o qual será denotado por $Z_r(R)$. Da mesma forma, denotamos $Z({}_RR)$ por $Z_l(R)$. Quando $Z_r(R) = R$ dizemos que R é anel singular à direita, e quando $Z_r(R) = 0$ dizemos que R é anel não singular à direita. Analogamente para à esquerda. Note ainda que todo domínio é não singular.

Lema 4.1.1. *(a) A classe dos R-módulos não singulares é fechada sobre submódulos e extensões essenciais.*

(b) A classe dos R-módulos singulares é fechada sobre submódulos e módulos quocientes.

Demonstração: (a) Se $A \leq B$ então $Z(A) = A \cap Z(B)$. Se B é não singular, segue que, $Z(A) = A \cap 0 = 0$. Agora, se A é não singular e $A \leq_e B$ temos $A \cap Z(B) = Z(A) = 0$. Então, segue que, $Z(B) = 0$.
(b) Se $A \leq B$ e B singular então $Z(A) = A \cap Z(B) = A \cap B = A$. Além disso, $\frac{Z(B)}{A} \leq Z\left(\frac{B}{A}\right)$, pois se $\bar{b} \in \frac{Z(B)}{A}$ então existe $I \leq_e R$ tal que $bI = 0$. Então $\bar{b}I = 0$, ou seja, $\bar{b} \in Z\left(\frac{B}{A}\right)$. Assim, $\frac{B}{A} = \frac{Z(B)}{A} \leq Z\left(\frac{B}{A}\right)$. Como $Z\left(\frac{B}{A}\right) \leq \frac{B}{A}$, segue que $\frac{B}{A}$ é singular.

□

No caso em que R é um domínio comutativo, a imagem do radical de torção Z coincide com o submódulo de torção, isto é, $Z(A) = T(A)$ quando $A \in$ Mod-R. De fato, seja $a \in Z(A)$. Então existe $I \in \mathcal{L}(R)$ tal que $aI = 0$. Como $I \neq 0$, existe $r \in I - \{0\}$ tal que $ar = 0$. Assim, $a \in T(A)$. Por outro lado, se $a \in T(A)$ então existe $r \in R - \{0\}$ tal que $ar = 0$. Seja $I = rR$ um ideal à direita de R. Então $I \neq 0$, pois $r \in I$ e dado $s \in R - \{0\}$ temos $0 \neq sr = rs \in I$. Assim $I \in \mathcal{L}(R)$. Além disso, $aI = arR = 0$, ou seja, $a \in Z(A)$.
Seja R um anel qualquer com unidade. Estamos interessados em obter propriedades análogas àquelas do Teorema 2.7.1 para o anel R. Quando R não é necessariamente

um domínio comutativo, nosso análogo para $T(A)$ será $Z(A)$. Assim, precisamos ter $Z\left(\frac{A}{Z(A)}\right) = 0$. Isso impõe a restrição de trabalharmos com anéis não singulares, como mostra a próxima proposição.

Proposição 4.1.1. *$Z_r(R) = 0$ se, e somente se, $Z\left(\frac{A}{Z(A)}\right) = 0$ para todo R-módulo à direita A.*

Demonstração: Como $Z\left(\frac{A}{Z(A)}\right) \leq \frac{A}{Z(A)}$, segue pelo 2º teorema do homomorfismo, que existe um R-módulo C tal que $Z(A) \leq C \leq A$ e $\frac{C}{Z(A)} = Z\left(\frac{A}{Z(A)}\right)$. Vamos verificar que $Z(A) \leq_e C$. Seja $M \leq C$ tal que $M \cap Z(A) = 0$. Então $M \leq A$ e $Z(M) = M \cap Z(A) = 0$. Definimos $\varphi : M \longrightarrow \frac{C}{Z(A)}$ por $\varphi(m) = m + Z(A)$, que é R-monomorfismo, pois $\mathrm{Ker}(\varphi) = M \cap Z(A) = 0$. Portanto $M \simeq \varphi(M) \leq \frac{C}{Z(A)}$. Note também que $Z\left(\frac{C}{Z(A)}\right) = Z\left(Z\left(\frac{A}{Z(A)}\right)\right) = Z\left(\frac{A}{Z(A)}\right) = \frac{C}{Z(A)}$. Desta forma, $\frac{C}{Z(A)}$ é singular e então pelo Lema 4.1.1, segue que, $\varphi(M) \simeq M$ é singular. Logo, $M = Z(M) = 0$, e então, $Z(A) \leq_e C$. Suponha que $Z\left(\frac{A}{Z(A)}\right) \neq 0$. Então $Z(A) < C$ e existe $x \in (C - Z(A))$. Seja $J = \{r \in R \ / \ xr = 0\}$. Como $xJ = 0$ e $x \notin Z(A)$, segue que $J \notin \mathcal{L}(R)$. Assim, R tem um ideal à direita I não nulo tal que $I \cap J = 0$. Definimos o isomorfismo $\psi : I \longrightarrow xI$ por $\psi(k) = xk$. Desde que $Z_r(R) = 0$, temos $Z(I) = 0$ e daí $Z(xI) = 0$. Como $xI \leq A$ vem que $0 = Z(xI) = xI \cap Z(A)$, o que contradiz o fato de que $Z(A) \leq_e C$, pois $0 \neq xI \leq C$. Logo, $Z\left(\frac{A}{Z(A)}\right) = 0$. A recíproca está assegurada em [10], pg.37.

□

No capítulo 2, vimos que para um domínio comutativo R e para um R-módulo A temos $S^{-1}A = \mathcal{E}\left(\frac{A}{Z(A)}\right)$, quando $S = R^*$. Agora definimos:

Definição 4.1.3. *Seja R um anel com unidade tal que $Z_r(R) = 0$. Se A é um R-módulo à direita, denotaremos o fecho injetivo de $\frac{A}{Z(A)}$ por S^oA. Assim $S^oA = \mathcal{E}\left(\frac{A}{Z(A)}\right)$ é um R-módulo injetivo.*

Da Proposição 2.6.4 (a), segue que $\frac{A}{Z(A)} \leq_e S^oA$. Assim, da Proposição 4.1.1 e do Lema 4.1.1 , vem que S^oA é um R-módulo não singular.

Observe que quando $A = R$, obtemos $S^oR = \mathcal{E}\left(\frac{R}{Z(R)}\right) = \mathcal{E}(R)$. Mostraremos mais adiante que S^oR tem estrutura de anel.

Note também que quando R é um domínio comutativo, $S^oA = \mathcal{E}\left(\frac{A}{Z(A)}\right) = \mathcal{E}\left(\frac{A}{T(A)}\right) = S^{-1}A$ para $S = R^*$. Portanto, a definição acima generaliza a definição de localização no sistema multiplicativo R^*.

Nosso objetivo agora é verificar que para cada R-módulo M, o módulo quociente $Q(M)$ associado ao radical de torção Z é igual a S^oM. Para isso usaremos o lema a seguir.

Lema 4.1.2. *Se $A \leq_e B$ então $\frac{B}{A}$ é singular.*

Demonstração: Dado $b \in B$ considere o homomorfismo $\alpha : R \longrightarrow B$ dado por $\alpha(r) = br$. De acordo com a Proposição 2.6.1, $\alpha^{-1}(A) \leq_e R$, isto é, o ideal à direita $I = \{r \in R \ / \ br \in A\}$ pertence a $\mathcal{L}(R)$. Mas, $bI \leq A = \mathrm{Ker}(\pi)$, onde $\pi : B \longrightarrow \frac{B}{A}$ é a projeção. Assim, $\pi(b)I = 0$, ou seja, $\pi(b) \in Z\left(\frac{B}{A}\right)$. Como π é epimorfismo, segue que $Z\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{B}{A}$.

□

Teorema 4.1.1. *Seja Q o funtor quociente associado ao radical de torção Z. Se $Z_r(R) = 0$ então para cada R-módulo M temos $Q(M) = S^oM$.*

Demonstração: Sabemos que $\frac{M}{Z(M)} \leq_e D\left(\frac{M}{Z(M)}\right) \leq_e \mathcal{E}\left(\frac{M}{Z(M)}\right)$. Usando o lema anterior, vem que $\frac{\mathcal{E}\left(\frac{M}{Z(M)}\right)}{D\left(\frac{M}{Z(M)}\right)}$ é singular, isto é, $Z\left(\frac{\mathcal{E}\left(\frac{M}{Z(M)}\right)}{D\left(\frac{M}{Z(M)}\right)}\right) = \frac{\mathcal{E}\left(\frac{M}{Z(M)}\right)}{D\left(\frac{M}{Z(M)}\right)}$. Por outro lado, temos que $D\left(\frac{M}{Z(M)}\right)$ é divisível pela Proposição 3.2.1, e então $\frac{\mathcal{E}\left(D\left(\frac{M}{Z(M)}\right)\right)}{D\left(\frac{M}{Z(M)}\right)}$ é não singular, isto é, $Z\left(\frac{\mathcal{E}\left(D\left(\frac{M}{Z(M)}\right)\right)}{D\left(\frac{M}{Z(M)}\right)}\right) = 0$. Mas vimos na seção 3.2 que $\mathcal{E}\left(D\left(\frac{M}{Z(M)}\right)\right) = \mathcal{E}\left(\frac{M}{Z(M)}\right)$. Portanto, $\frac{\mathcal{E}\left(\frac{M}{Z(M)}\right)}{D\left(\frac{M}{Z(M)}\right)} = Z\left(\frac{\mathcal{E}\left(\frac{M}{Z(M)}\right)}{D\left(\frac{M}{Z(M)}\right)}\right) = Z\left(\frac{\mathcal{E}\left(D\left(\frac{M}{Z(M)}\right)\right)}{D\left(\frac{M}{Z(M)}\right)}\right) = 0$, ou seja, $D\left(\frac{M}{Z(M)}\right) = \mathcal{E}\left(\frac{M}{Z(M)}\right)$. Assim $Q(M) = S^oM$.

□

O teorema acima, junto com a definição 3.2.5, diz que se R é um anel não singular então S^oM é o módulo quociente para o R-módulo M, relativo a teoria de torção não singular Z.

4.2 O Funtor S^o

Vimos no primeiro capítulo, que se S é um sistema multiplicativo de um anel com unidade R então $S^{-1}R$ é um anel e $S^{-1}A$ é um $S^{-1}R$-módulo quando A é R-módulo. No capítulo 2 verificamos que S^{-1} é um funtor exato. Nesta seção mostraremos que quando R é anel não singular à direita então S^oR é anel e S^oA é S^oR-módulo à direita quando A é R-módulo à direita. Demonstraremos que neste caso, S^oA é S^oR-módulo não singular e injetivo e verificaremos também que S^o : Mod-R $\longrightarrow$ Mod-S^oR é funtor exato. Mostraremos ainda que quando R é um domínio comutativo e S é um sistema multiplicativo qualquer, os funtores S^o e S^{-1} são equivalentes na categoria Mod-R.

Para provar que S^oR é um anel e que S^oA é um S^oR-módulo, para cada R-módulo A, usaremos a seguinte proposição:

Proposição 4.2.1. *(a) Um módulo C é não singular se, e somente se,* $\mathrm{Hom}_R(A, C) = 0$ *para todo módulo singular A.*

(b) Sejam A, B e C R-módulos tais que $A \leq B$, $\frac{B}{A}$ é singular e C é não singular. Então quaisquer dois homomorfismos de B para C que coincidem em A devem ser iguais.

Demonstração: (a) Se A é singular, C é não singular e $f \in \mathrm{Hom}_R(A, C)$ então $f(A) = f(Z(A)) \leq Z(C) = 0$. Assim, $f = 0$. Por outro lado, vimos no capítulo 3 que Z é um radical idempotente e então $Z(C)$ é singular. Usando a hipótese, temos que $\mathrm{Hom}_R(Z(C), C) = 0$. Assim, $Z(C) \hookrightarrow C$ é a função identicamente nula. Logo, $Z(C) = 0$.
(b) Do item (a) segue que, $\mathrm{Hom}_R\left(\frac{B}{A}, C\right) = 0$. Tome a sequência exata de R-módulos $0 \longrightarrow A \xhookrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} \frac{B}{A} \longrightarrow 0$. Então a sequência $0 = \mathrm{Hom}_R\left(\frac{B}{A}, C\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(B, C) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Hom}_R(A, C)$ é exata de $\mathbb{Z}$-módulos. Portanto ψ é injetiva. Dados $f, g \in \mathrm{Hom}_R(B, C)$ tais que $f|_A = g|_A$ temos, $\psi(f) = f \circ i = f|_A = g|_A = g \circ i = \psi(g)$. Assim $f = g$.

□

Já observamos que $S^oR = \mathcal{S}(R)$. Assim $R \leq S^oR$ e como S^oR tem estrutura de R-módulo à direita, então conhecemos produtos da forma xr, com $x \in S^oR$ e $r \in R$. Também temos estrutura de grupo abeliano aditivo em S^oR. Se existe uma estrutura de anel em S^oR que usa esta operação de adição e estende a multiplicação do módulo, no sentido que esta multiplicação restrita a elementos de R coincide com a multiplicação do módulo, dizemos que a estrutura de anel é compatível com a estrutura de R-módulo. Similarmente, uma estrutura de S^oR-módulo em S^oA que usa a adição do R-módulo S^oA e estende a multiplicação de R-módulo é dita compatível com a estrutura de R-módulo em S^oA.

Teorema 4.2.1. *Seja $Z_r(R) = 0$.*

(a) S^oR tem uma única estrutura de anel compatível com sua estrutura de R-módulo.

(b) *Para todo R-módulo à direita A, S^oA tem uma única estrutura de S^oR-módulo compatível com sua estrutura de R-módulo.*

Demonstração:
(a) Seja $Q = \mathrm{End}_R(S^oR) = \{f : S^oR \longrightarrow S^oR \ / \ f \text{ é } R\text{-homomorfismo}\}$. É de rápida verificação que $(Q, +, \circ)$ é anel, onde $+$ é a soma usual de funções e $\circ$ é a composição de funções. Considere então a função $\Phi : Q \longrightarrow S^oR$ dada por $\Phi(f) = f(1)$. Vamos mostrar que Φ é um $\mathbb{Z}$-isomorfismo. Que Φ é um $\mathbb{Z}$-homomorfismo é óbvio. Se $f \in \mathrm{Ker}(\Phi)$ então $f(1) = 0$. Portanto, $f(1)r = 0 \ \ \forall r \in R$, ou seja, $f(r) = 0 \ \ \forall r \in R$. Então, f e a função nula coincidem em R. Assim, segue da Proposição 4.2.1, que $f = 0$. Por outro lado, dado $x \in S^oR$ tome o R-homomorfismo $g : R \longrightarrow S^oR$ definido por $g(r) = xr$. Então, $\Phi(g) = g(1) = x$. Como S^oR é injetivo, existe $h \in Q$ extensão de g. Portanto, Φ é sobrejetor. Tomando em S^oR a operação de adição da estrutura de R-módulo e definindo a multiplicação pela regra $x \cdot y = \Phi\left(\Phi^{-1}(x) \circ \Phi^{-1}(y)\right) = \left(\Phi^{-1}(x)\right)(y)$ verifica-se facilmente que $(S^oR, +, \cdot)$ tem estrutura de anel. Sejam $x \in S^oR$ e $r \in R$, então $x \cdot r = \Phi^{-1}(x)(r) = \left(\Phi^{-1}(x)(1)\right) r = xr$. Desta forma, a estrutura de anel é compatível com sua estrutura de R-módulo à direita. Por causa da compatibilidade, escrevemos xy para o produto $x \cdot y$ em S^oR. Vamos supor que $* : S^oR \times S^oR \longrightarrow S^oR$, juntamente com a adição da estrutura de R-módulo à direita torna S^oR um anel compatível com sua estrutura de R-módulo à direita. Dado $x \in S^oR$, defina o R-homomorfismo $f : S^oR \longrightarrow S^oR$, $f(y) = x * y - xy$. Assim, dado $r \in R$, temos $f(r) = x * r - xr = 0$ pois as estruturas de anel são compatíveis com a estrutura de R-módulo. Portanto f coincide com a função nula em R. Segue da Proposição 4.2.1, que $f = 0$. Assim a estrutura de anel em S^oR é única.
(b) Consideremos Q e Φ como no item (a) e $K = \mathrm{Hom}_R(S^oR, S^oA)$. Como K é um grupo abeliano, podemos torná-lo um Q-módulo à direita tomando a multiplicação como sendo a composição de funções, isto é,

$$\begin{aligned} \circ : \quad K \times Q &\longrightarrow K \\ (f, g) &\longmapsto f \circ g \end{aligned} .$$

Como em (a), tome o $\mathbb{Z}$-isomorfismo $\Psi : K \longrightarrow S^oA$, $\Psi(f) = f(1)$. Dados $x \in S^oA$ e $y \in S^oR$ definimos

$$x \cdot y = \Psi\left(\Psi^{-1}(x) \circ \Phi^{-1}(y)\right) = \left(\Psi^{-1}(x) \circ \Phi^{-1}(y)\right)(1) = \Psi^{-1}(x)(y) \ .$$

Analogamente a parte (a), verificamos a compatibilidade das estruturas e a unicidade.

□

Nosso objetivo agora é verificar que se C é um R-módulo então S^oC é um S^oR-módulo injetivo e não singular.

Dado um S^oR-módulo à direita A, ele também é um R-módulo à direita. Assim para não haver confusão, usaremos as notações $Z_R(A)$ e $Z_{S^oR}(A)$ para indicar o submódulo singular de A, quando vemos A como R-módulo e como S^oR-módulo respectivamente.

Lema 4.2.1. *Sejam $Z_r(R) = 0$ e A, B dois S^oR-módulos à direita.*

(a) Se $Z_R(B) = 0$ então $\mathrm{Hom}_R(A, B) = \mathrm{Hom}_{S^oR}(A, B)$.

(b) Se M é um R-submódulo de B tal que $B = A \oplus M$ e $Z_R(A) = 0$ então M é S^oR-submódulo de B.

(c) $\mathcal{L}(S^oR) = \{I \leq (S^oR)_{S^oR} \ / \ I \cap R \in \mathcal{L}(R)\}$.

Demonstração: (a) Como estamos trabalhando com a hipótese $Z_r(R) = 0$, já observamos que R é um subanel de S^oR. Assim todo S^oR-homomorfismo é um R-homomorfismo. Seja $f : A \longrightarrow B$ um R-homomorfismo. Dado $a \in A$, defina $g : S^oR \longrightarrow B$ por $g(x) = f(ax) - f(a)x$. Como $g|_R$ é identicamente nula, segue da Proposição 4.2.1, que $g = 0$. Portanto $f \in \mathrm{Hom}_{S^oR}(A, B)$.
(b) Dado $B = A \oplus M$ defina o R-homomorfismo $f : B \longrightarrow A$, $f(a+m) = a$ e note que $\mathrm{Ker}(f) = M$. Por (a), temos que f é S^oR-homomorfismo. Daí, $\mathrm{Ker}(f) = M$ é S^oR-submódulo de B.
(c) Dado $I \leq_e (S^oR)_{S^oR}$, precisamos verificar que $I \cap R \leq_e R$. Seja M um ideal à direita de R tal que $(I \cap R) \cap M = 0$. Como R é não singular, temos que M é não singular. Assim $M = \frac{M}{Z(M)} \leq_e S^oM \leq S^oR$. Tome $0 \neq x \in I \subseteq S^oR$. Então existe $r \in R$ tal que $0 \neq xr \in R$, visto que $R \leq_e S^oR$. Como I é ideal à direita de S^oR, $xr \in I$. Desta forma, $I \cap R \leq_e I$. Da Proposição 2.6.1 (b) temos que $0 = (I \cap R) \cap M \leq_e I \cap S^oM$, ou seja, $I \cap S^oM = 0$. Mas $I \leq_e (S^oR)_{S^oR}$ e $S^oM \leq S^oR$, de onde segue que $S^oM = 0$. Conseqüentemente $M = 0$, e portanto $I \cap R \leq_e R$. Por outro lado, seja I ideal de S^oR tal que $I \cap R \in \mathcal{L}(R)$. Como $I \cap R \leq_e R \leq_e S^oR$ temos $I_R \leq_e (S^oR)_R$ e então $I_{S^oR} \leq_e (S^oR)_{S^oR}$. Assim $I \in \mathcal{L}(S^oR)$.

□

Teorema 4.2.2. *Sejam $Z_r(R) = 0$ e C um R-módulo à direita. Então S^oC é S^oR-módulo à direita não singular e injetivo.*

Demonstração: Seja C um R-módulo à direita. Sabemos, pelo Teorema 4.2.1, que S^oC é um S^oR-módulo. Também já vimos que $Z_R(S^oC) = 0$. Então para ver que S^oC é S^oR-módulo não singular, basta mostrar que $Z_{S^oR}(S^oC) = Z_R(S^oC)$. Se $x \in Z_R(S^oC)$ então $x \in S^oC$ e existe $I \leq_e R$ tal que $xI = 0$. Considere $I(S^oR)$ que é ideal à direita de S^oR. Como $I \leq (I(S^oR) \cap R) \leq R$ e $I \leq_e R$ vem que $(I(S^oR) \cap R) \leq_e R$, e do lema anterior $I(S^oR) \in \mathcal{L}(S^oR)$. Claro que $x(I(S^oR)) = 0$, ou seja, $I \in \mathcal{L}(S^oR)$. Logo $x \in Z_{S^oR}(S^oC)$. Por outro lado, se $x \in Z_{S^oR}(S^oC)$ então $x \in S^oC$ e $xI = 0$ para algum $I \leq_e S^oR$. Pelo lema acima, $I \cap R \leq_e R$. Como $x(I \cap R) = 0$, segue que $x \in Z_R(S^oC)$. Portanto $Z_{S^oR}(S^oC) = Z_R(S^oC) = 0$. Assim S^oC é um S^oR-módulo não singular. Para mostrar que S^oC é um S^oR-módulo injetivo, verifiquemos que a sequência exata de S^oR-módulos $0 \longrightarrow S^oC \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A \longrightarrow 0$ cinde. Como f é injetora, $S^oC \simeq f(S^oC) \leq B$. Sabemos que S^oC é R-módulo injetivo, e daí $f(S^oC)$ é R-módulo injetivo. Assim, a sequência exata de R-módulos $0 \longrightarrow f(S^oR) \xhookrightarrow{i} B \xrightarrow{g} A \longrightarrow 0$ cinde. Portanto, $f(S^oC)$ é um R-módulo que é somando direto de B. Além disso, como S^oC é um R-módulo não singular, temos que $f(S^oC)$ é R-módulo não singular. Desta forma, segue do lema acima que $f(S^oC)$ é um somando direto de B como S^oR-módulo, isto é, $B = f(S^oC) \oplus M$, sendo M um S^oR-módulo. Desta maneira, a sequência de S^oR-módulos $0 \longrightarrow S^oC \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A \longrightarrow 0$ cinde, onde a cisão f' é definida como $f' : B = f(S^oC) \oplus M \longrightarrow S^oC$, $f'(u+m) = f^{-1}(u)$. Note que f' está bem definida, pois $f : S^oC \longrightarrow f(S^oC)$ é isomorfismo. Portanto, S^oC é um S^oR-módulo injetivo.

$\square$

Seja R um anel não singular. Mostraremos agora que S^o : Mod-$R \longrightarrow$ Mod-R é um funtor aditivo.

Para verificar que S^o é um funtor, devemos definir um R-homomorfismo $S^o(f) : S^oA \longrightarrow S^oB$ para cada R-homomorfismo $f : A \longrightarrow B$.

Como Z é um radical, temos que $f(Z(A)) \subseteq Z(B)$, e então $\overline{f} : \frac{A}{Z(A)} \longrightarrow \frac{B}{Z(B)}$, $\overline{f}(a+Z(A)) = f(a)+Z(B)$ está bem definida e é um R-homomorfismo.

Verificaremos que $\overline{f}$ estende-se unicamente para um R-homomorfismo de S^oA em S^oB, o qual chamaremos de S^of.

Lema 4.2.2. *Sejam R um anel tal que $Z_r(R) = 0$ e $f : A \longrightarrow B$ um R-homomorfismo. Então $\overline{f} : \frac{A}{Z(A)} \longrightarrow \frac{B}{Z(B)}$, $\overline{f}(a + Z(A)) = f(a) + Z(B)$ estende-se unicamente para um R-homomorfismo de S^oA em S^oB.*

Demonstração: Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \frac{A}{Z(A)} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\overline{f}"'] & S^oA \arrow[dl, dotted, "S^of"] \\
& S^oB &
\end{tikzcd}$$

Como S^oB é injetivo, existe um R-homomorfismo $S^of : S^oA \longrightarrow S^oB$ tal que $S^of \circ i = \overline{f}$, ou seja, S^of é extensão de $\overline{f}$. Vimos na seção anterior que S^oB é não singular. Pelo Lema 4.1.2 também temos que $\frac{S^oA}{\left(\frac{A}{Z(A)}\right)}$ é singular. Assim a unicidade da extensão de $\overline{f}$ segue da Proposição 4.2.1.

□

Proposição 4.2.2. *Seja* $Z_r(R) = 0$.

(a) S^o : Mod-$R \longrightarrow$ Mod-R *é um funtor aditivo.*

(b) S^o *é um funtor aditivo de* Mod-R *em* Mod-S^oR.

Demonstração: (a)
(i) Seja $A \in$ Mod-R. Por definição, $S^oA \in$ Mod-R.
(ii) Seja f um R-homomorfismo de A em B. De acordo com o corolário acima, temos que S^of é um R-homomorfismo de S^oA em S^oB.
(iii) Seja $A \in$ Mod-R e $Id : A \longrightarrow A$ a função identidade. Então $\overline{Id}$ é a função identidade de $\frac{A}{Z(A)}$. A função identidade de S^oA coincide com $\overline{Id}$ em $\frac{A}{Z(A)}$. Pela unicidade da extensão, segue que $S^o(Id)$ é a função identidade de S^oA.
(iv) Sejam $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$, R-homomorfismos. É fácil ver que $\overline{g \circ f} = \overline{g} \circ \overline{f}$. Portanto $S^o(g \circ f)$ e $S^o(g) \circ S^o(f)$ são extensões de $\overline{g \circ f}$. Pela unicidade da extensão, $S^o(g \circ f) = S^o(g) \circ S^o(f)$.
Finalmente, sejam $f, g : A \longrightarrow B$ como $\overline{f+g} = \overline{f} + \overline{g}$, segue da unicidade da extensão que $S^o(f+g) = S^of + S^og$.
(b) Como vimos no item (b) do Teorema 4.2.1, S^o leva R-módulos à direita em S^oR-módulos à direita. Já vimos também que S^o preserva funções identidade, composição e somas de funções. Basta mostrar então que S^o leva um R-homomorfismo $f : A \longrightarrow B$ em um S^oR-homomorfismo de S^oA em S^oB. Dado $x \in S^oA$, definimos $g : S^oR \longrightarrow S^oB$ pela regra $g(y) = (S^of)(xy) - ((S^of)(x))\,y$. Então $g|_R$ é identicamente nula. Assim, segue da Proposição 4.2.1 que g=0. Portanto S^of é de fato um S^oR-homomorfismo. □

Utilizaremos o próximo lema para mostrar que, para um domínio comutativo R e um sistema multiplicativo S qualquer os funtores S^o e S^{-1} são equivalentes na categoria Mod-R.

Lema 4.2.3. *Seja $\varphi : A \longrightarrow B$ isomorfismo de R-módulos. Então existe $\psi : \mathcal{E}(A) \longrightarrow \mathcal{E}(B)$ isomorfismo de R-módulos tal que $\psi|_A = \varphi$.*

Demonstração: Como $\varphi : A \longrightarrow B \subseteq \mathcal{E}(B)$ é um monomorfismo, $\mathcal{E}(B)$ é um módulo injetivo e $A \leq_e \mathcal{E}(A)$, segue do Lema 2.6.2 a existência de um monomorfismo $\psi : \mathcal{E}(A) \longrightarrow \mathcal{E}(B)$ tal que $\psi|_A = \varphi$. Portanto $B = \varphi(A) = \psi(A) \leq \psi(\mathcal{E}(A)) \leq \mathcal{E}(B)$ e como $B \leq_e \mathcal{E}(B)$, segue pela Proposição 2.6.1 que $\psi(\mathcal{E}(A)) \leq_e \mathcal{E}(B)$. Visto que ψ é monomorfismo, temos $\psi(\mathcal{E}(A)) \simeq \mathcal{E}(A)$. Desta forma, $\psi(\mathcal{E}(A))$ é injetivo. Usando a Proposição 2.6.3, segue que $\psi(\mathcal{E}(A)) = \mathcal{E}(B)$.

□

Teorema 4.2.3. *Seja R um domínio comutativo. Então os funtores S^0 e S^{-1} são equivalentes na categoria* Mod-R.

Demonstração: Considere o R-homomorfismo $\varphi : A \longrightarrow S^{-1}A$, $\varphi(a) = \frac{a}{1}$. Note que $\mathrm{Ker}(\varphi) = T(A) = Z(A)$. Usando o teorema do homomorfismo, temos $\frac{A}{Z(A)} \simeq \varphi(A)$, onde o isomorfismo é $\delta_A : \frac{A}{Z(A)} \longrightarrow \varphi(A)$, $\delta_A(a + Z(A)) = \varphi(a)$. Aplicando o Lema 4.2.3 para o isomorfismo δ_A, vem que existe um R-isomorfismo $\psi_A : \mathcal{E}\left(\frac{A}{Z(A)}\right) \longrightarrow \mathcal{E}(\varphi(A))$ tal que $\psi|_{\frac{A}{Z(A)}} = \delta_A$. Observe que $\mathcal{E}\left(\frac{A}{Z(A)}\right) = S^oA$ e que $\mathcal{E}(\varphi(A)) = S^{-1}A$ conforme visto na demonstração do Teorema 2.7.1 item (c). Assim, dado $A \in$ Mod-R, vimos que existe um R-isomorfismo $\psi_A : S^oA \longrightarrow S^{-1}A$. Falta provarmos que para cada R-homomorfismo $f : A \longrightarrow B$, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} S^oA & \xrightarrow{\psi_A} & S^{-1}A \\ \downarrow{\scriptstyle S^of} & & \downarrow{\scriptstyle S^{-1}f} \\ S^oB & \xrightarrow{\psi_B} & S^{-1}B \end{array}$$

comuta, isto é, $\psi_B(S^of(S^oA)) = S^{-1}f(\psi_A(S^oA))$. Usando a Proposição 4.2.1, é suficiente mostrar que as aplicações coincidem em $\frac{A}{Z(A)}$. Dado $a + Z(A) \in \frac{A}{Z(A)}$, temos

$$\psi_B(S^of(a + Z(A))) = \psi_B(f(a) + Z(B)) = \delta_B(f(a) + Z(B)) = \frac{f(a)}{1} =$$

$$= S^{-1}f\left(\psi_A(a + Z(A)\right) .$$

□

Dedicaremos o restante desta seção para mostrar que o funtor S^o : Mod-$R \longrightarrow$ Mod-S^oR é exato. Em particular teremos que S^o : Mod-$R \longrightarrow$ Mod-R é exato. Para mostrar a exatidão de S^o, desenvolveremos alguns resultados auxiliares.

Proposição 4.2.3. *(a) A classe dos R-módulos não singulares é fechada sobre produtos diretos.*

(b) Se B é não singular e $A \leq B$ então $\frac{B}{A}$ é singular se, e somente se, $A \leq_e B$.

Demonstração: (a) Sejam $\{C_\alpha\}$ uma família de R-módulos não singulares e A um módulo singular. Pela Proposição 4.2.1, temos que $\mathrm{Hom}_R(A, C_\alpha) = 0$ para cada α. Dados $f \in \mathrm{Hom}_R(A, \prod C_\alpha)$ e $f_\alpha : \prod C_\alpha \longrightarrow C_\alpha$ a projeção sobre C_α, temos que $f_\alpha \circ f \in \mathrm{Hom}_R(A, C_\alpha) = 0$. Segue que $f = 0$ e novamente pela Proposição 4.2.1 vem que $\prod C_\alpha$ é não singular.
(b) Se $\frac{B}{A}$ é singular e $0 \neq x \in B$ então $\overline{x}I = 0$ para algum $I \in \mathcal{L}(R)$, com $\overline{x} = x + A$. Assim, $xI \leq A$, pois $xI \subseteq A$ e $xI \leq B$. Como B é não singular, $xI \neq 0$ e então $xR \cap A \neq \{0\}$. Logo, $A \leq_e B$. A outra direção é o Lema 4.1.2.

□

Proposição 4.2.4. *Sejam $Z_r(R) = 0$ e $A \leq C$ com A e C R-módulos à direita. Existe um único R-módulo à direita $\mathcal{P}_C(A)$ satisfazendo:*

i. $A \leq \mathcal{P}_C(A) \leq C$

ii. $\frac{C}{\mathcal{P}_C(A)}$ *é não singular*

iii. $\frac{\mathcal{P}_C(A)}{A}$ *é singular.*

Demonstração: Tome $\mathcal{P}_C(A) = \bigcap\limits_{\alpha} B_\alpha$ onde $A \leq B_\alpha \leq C$ e $\frac{C}{B_\alpha}$ é não singular. Considere o R-monomorfismo $f : \frac{C}{\mathcal{P}_C(A)} \longrightarrow \prod\limits_{\alpha}\left(\frac{C}{B_\alpha}\right)$ dada por $f(x + \mathcal{P}_C(A)) = (\overline{x_\alpha})_\alpha$ onde $\overline{x_\alpha} = x + B_\alpha$. Assim, $\frac{C}{\mathcal{P}_C(A)} \simeq Im(f) \leq \prod\limits_{\alpha}\left(\frac{C}{B_\alpha}\right)$. Segue da proposição acima e do Lema 4.1.1 que $\frac{C}{\mathcal{P}_C(A)}$ é não singular. Considere agora um R-módulo T tal que $A \leq T \leq C$ e $Z\left(\frac{C}{A}\right) = \frac{T}{A}$. Assim $\frac{C}{T} \simeq \frac{\frac{C}{A}}{\frac{T}{A}} = \frac{\frac{C}{A}}{Z\left(\frac{C}{A}\right)}$ e $\frac{C}{T}$ é não singular pela Proposição 4.1.1. Então $\mathcal{P}_C(A) \leq T$ e $\varphi : \frac{T}{A} \longrightarrow \frac{T}{\mathcal{P}_c(A)}$, $\varphi(\overline{x}) = \overline{\overline{x}}$ é R-epimorfismo.

Pelo Lema 4.1.1 segue que $\frac{T}{\mathcal{P}_C(A)} \simeq \frac{\frac{T}{A}}{\mathrm{Ker}(\varphi)}$ é singular, pois $\frac{T}{A}$ é singular. Finalmente de $\frac{T}{\mathcal{P}_C(A)} \leq \frac{C}{\mathcal{P}_C(A)}$ vem que $\frac{T}{\mathcal{P}_C(A)} = Z\left(\frac{T}{\mathcal{P}_C(A)}\right) \leq Z\left(\frac{C}{\mathcal{P}_C(A)}\right) = 0$, isto é, $T = \mathcal{P}_C(A)$ e portanto $\frac{\mathcal{P}_C(A)}{A}$ é singular. Seja K um R-módulo tal que $A \leq K \leq C$, $\frac{C}{K}$ é não singular e $\frac{K}{A}$ é singular. Segue da maneira que foi escolhido $\mathcal{P}_C(A)$ que $\mathcal{P}_C(A) \leq K$. Por outro lado, $\frac{K}{A} \leq \frac{C}{A}$, e então $\frac{K}{A} = Z\left(\frac{K}{A}\right) \leq Z\left(\frac{C}{A}\right) = \frac{\mathcal{P}_C(A)}{A}$. Assim, $K = \mathcal{P}_C(A)$.

□

Lema 4.2.4. *Sejam $Z_r(R) = 0$ e $f : A \longrightarrow B$ um R-monomorfismo. Então:*

(a) $\overline{f} : \frac{A}{Z(A)} \longrightarrow \frac{B}{Z(B)}$ e $S^o f : S^o A \longrightarrow S^o B$ são R-monomorfismos.

(b) $\mathcal{P}_{S^o B}\left(\overline{f}\left(\frac{A}{Z(A)}\right)\right) = S^o f(S^o A)$.

Demonstração: (a) Verifiquemos que $f(Z(A)) = Z(f(A))$. Se $f(a) \in f(Z(A))$ então existe $I \in \mathcal{L}(R)$ tal que $aI = 0$. Assim, $f(a)I = 0$ e então $f(a) \in Z(f(A))$. Por outro lado, se $f(a) \in Z(f(A))$ então existe $I \in \mathcal{L}(R)$ tal que $f(a)I = 0$. Assim $f(aI) = 0$, e como f é monomorfismo $aI = 0$. Portanto, $f(a) \in f(Z(A))$. Vamos supor que $\overline{f}(a + Z(A)) = \overline{f}(b + Z(A))$ com $a, b \in A$. Então $f(a - b) \in Z(B)$. Como $f(Z(A)) = Z(f(A)) = f(A) \cap Z(B)$, temos $f(a - b) \in f(Z(A))$, ou seja, $a - b \in Z(A)$. Logo $\overline{f}$ é injetora. Além disso, $S^o f$ é extensão de $\overline{f}$, e portanto, $\frac{A}{Z(A)} \cap (\mathrm{Ker}(S^o f)) = ker(\overline{f}) = 0$. Suponha que $x \in \mathrm{Ker}(S^o f)$. Se $x \in \frac{A}{Z(A)}$ então $x = 0$. Supor que $x \in \left(S^o A - \frac{A}{Z(A)}\right)$ e $x \neq 0$. Como $\frac{A}{Z(A)} \leq_e S^o A$, existe $r \in R - \{0\}$ tal que $xr \neq 0$ e $xr \in \frac{A}{Z(A)}$. Mas, $S^o f(xr) = S^o f(x)r = 0$. Então $xr \in (\mathrm{Ker}(S^o f)) \cap \frac{A}{Z(A)}$. Logo $xr = 0$, o que é uma contradição.
(b) É claro que $\overline{f}\left(\frac{A}{Z(A)}\right) \leq S^o f(S^o A) \leq S^o B$. Pelo item (a), f e $S^o f$ são monomorfismos, assim $\frac{S^o f(S^o A)}{\overline{f}\left(\frac{A}{Z(A)}\right)} \simeq \frac{S^o A}{\frac{A}{Z(A)}}$ é singular pelo Lema 4.1.2. Falta verificar que $\frac{S^o B}{S^o f(S^o A)}$ é não singular. Note que $Z\left(\frac{S^o B}{S^o f(S^o A)}\right) = \frac{T}{S^o f(S^o A)}$ para algum R-módulo T tal que $S^o f(S^o A) \leq T \leq S^o B$. Claramente $\frac{T}{S^o f(S^o A)}$ é singular e $S^o B$ é não singular, então pelo Proposição 4.2.3, $S^o f(S^o A) \leq_e T$. O isomorfismo entre $S^o A$ e $S^o f(S^o A)$ garante que $S^o f(S^o A)$ é injetivo, e pela Proposição 2.6.3 temos $T = S^o f(S^o A)$. Isso garante que $\frac{S^o B}{S^o f(S^o A)}$ é não singular.

□

Lema 4.2.5. *Seja $Z_r(R) = 0$.*

(a) Um R-módulo A é singular se, e somente se, $\mathrm{Hom}_R(A, C) = 0$ para todo R-módulo à direita C não singular.

(b) *Se* $0 \longrightarrow C \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow 0$ *é sequência exata de* R*-módulos à direita com* A *e* C *singulares então* B *é singular.*

Demonstração: (a) Se A é singular, então nós sabemos, pela Proposição 4.2.1, que $\mathrm{Hom}_R(A, C) = 0$ para todo R-módulo à direita C não singular. Assuma que $\mathrm{Hom}_R(A, C) = 0$ para todo R-módulo não singular C. Da Proposição 4.1.1 temos que $\frac{A}{Z(A)}$ é não singular, e então o R-epimorfismo $\pi : A \longrightarrow \frac{A}{Z(A)}$, $\pi(a) = a + Z(A)$ é nulo. Portanto, $A = Z(A)$.

(b) Segue de (a) que $\mathrm{Hom}_R(C, M) = 0$ e $\mathrm{Hom}_R(A, M) = 0$ para todo R-módulo M não singular. Porém, como $0 \longrightarrow C \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow 0$ é exata, vem que $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(B, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C, M)$ é sequência exata de $\mathbb{Z}$-módulos. Assim, $\mathrm{Hom}_R(B, M) = 0$, ou seja, B é singular.

□

Teorema 4.2.4. *Se* $Z_r(R) = 0$ *então* S^o *é um funtor exato de* Mod-R *para* Mod-S^oR.

Demonstração: Seja $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ uma sequência exata de R-módulos. Devemos mostrar que $0 \longrightarrow S^oA \xrightarrow{S^of} S^oB \xrightarrow{S^og} S^oC \longrightarrow 0$ é uma sequência exata de S^oR-módulos. Do Lema 4.2.4, segue que S^of é injetora, pois f é injetora. Vamos verificar que a sequência é exata em S^oB.

Afirmação 1. $\frac{g^{-1}(Z(C))}{f(A)}$ é singular.

Se $x \in \mathrm{Ker}(g)$, então $g(x) \in Z(C)$, e assim $x \in g^{-1}(Z(C))$. Desta forma, $f(A) = \mathrm{Ker}(g) \subseteq g^{-1}(Z(C))$. Como $g : B \longrightarrow C$ é sobrejetora, então $g|_{g^{-1}(Z(C))} : g^{-1}(Z(C)) \longrightarrow Z(C)$ é sobrejetora. Note também que, $\mathrm{Ker}\left(g|_{g^{-1}(Z(C))}\right)$ $\mathrm{Ker}(g) \subseteq g^{-1}(C)$, e daí

$$Z(C) \simeq \frac{g^{-1}(Z(C))}{\mathrm{Ker}\left(g\,|_{g^{-1}(Z(C))}\right)} = \frac{g^{-1}(Z(C))}{\mathrm{Ker}(g)} = \frac{g^{-1}(Z(C))}{f(A)} .$$

Sabemos que $Z(C)$ é singular, conseqüentemente $\frac{g^{-1}(Z(C))}{f(A)}$ é singular.

Note que $\overline{f}\left(\frac{A}{Z(A)}\right) \subseteq \mathrm{Ker}(\overline{g})$. De fato, se $\overline{y} \in \overline{f}\left(\frac{A}{Z(A)}\right)$ então $\overline{y} = \overline{f}(\overline{x})$, para algum $\overline{x} \in \frac{A}{Z(A)}$. Desta forma, $\overline{g}(\overline{y}) = \overline{g}(\overline{f}(\overline{x})) = \overline{g}(\overline{f(x)}) = \overline{g(f(x))} = \overline{0}$, ou seja, $\overline{y} \in \mathrm{Ker}(\overline{g})$.

Afirmação 2. O módulo $\frac{\mathrm{Ker}(\overline{g})}{\overline{f}\left(\frac{A}{Z(A)}\right)}$ é singular.

Inicialmente veremos que $\frac{g^{-1}(Z(C))}{Z(B)} = ker(\overline{g})$. De fato, seja $\overline{x} = x + Z(B) \in$

$\frac{g^{-1}(Z(C))}{Z(B)}$. Então $x \in g^{-1}(Z(C)) \subseteq B$, ou seja, $\overline{g}(\overline{x}) = \overline{g(x)}$. Mas $g(x) \in Z(C)$, daí $\overline{g(x)} = \overline{0}$ e portanto $\overline{x} \in \text{Ker}(\overline{g})$. Por outro lado, dado $\overline{x} \in \text{Ker}(\overline{g})$, $\overline{x} = x + Z(B)$, $x \in B$, temos $0 = \overline{g}(\overline{x}) = \overline{g(x)}$. Assim, $g(x) \in Z(C)$. Portanto $x \in g^{-1}(Z(C))$, ou equivalentemente, $\overline{x} = x + Z(B) \in \frac{g^{-1}(Z(C))}{Z(B)}$.
Agora tomamos

$$\begin{aligned} \pi : \quad \frac{g^{-1}(Z(C))}{f(A)} &\longrightarrow \frac{\text{Ker}(\overline{g})}{\overline{f}\left(\frac{A}{Z(A)}\right)} \\ x + f(A) &\longmapsto \overline{x} + \overline{f}\left(\frac{A}{Z(A)}\right) \end{aligned}$$

sendo $\overline{x} = x + Z(B)$. Verifiquemos que π está bem definido: se $x + f(A) = y + f(A)$ então $(x - y) \in f(A)$. Portanto, $(x - y) + Z(B) = f(a) + Z(B)$ para algum $a \in A$. Desta forma, $(x - y) + Z(B) = \overline{f}(a + Z(A))$, ou seja, $(x - y) + Z(B) \in \overline{f}\left(\frac{A}{Z(A)}\right)$. Assim, $\overline{x} + \overline{f}\left(\frac{A}{Z(A)}\right) = \overline{y} + \overline{f}\left(\frac{A}{Z(A)}\right)$. Segue imediatamente da definição de π a sobrejetividade. Logo,

$$\frac{\text{Ker}(\overline{g})}{\overline{f}\left(\frac{A}{Z(A)}\right)} \simeq \frac{\frac{g^{-1}(Z(C))}{f(A)}}{\text{Ker}(\pi)}.$$

Como vimos, $\frac{g^{-1}(Z(C))}{f(A)}$ é singular, e então segue do Lema 4.1.1, que $\frac{\text{Ker}(\overline{g})}{\overline{f}\left(\frac{A}{Z(A)}\right)}$ é singular.

Sabemos que $\frac{B}{Z(B)} \leq_e S^o g$ e $\text{Ker}(S^o B) \leq_e \text{Ker}(S^o g) \leq S^o B$. Então, segue da Proposição 2.6.1, que $\frac{B}{Z(B)} \cap \text{Ker}(S^o g) \leq_e \text{Ker}(S^o g)$. Assim $\text{Ker}(\overline{g}) \leq_e \text{Ker}(S^o g)$. Pelo Lema 4.1.2, vem que $\frac{\text{Ker}(S^o g)}{\text{Ker}(\overline{g})}$ é singular.

Afirmação 3. O módulo $\frac{\text{Ker}(S^o g)}{\overline{f}\left(\frac{A}{Z(A)}\right)}$ é singular.

Considere a sequência

$$0 \longrightarrow \frac{\text{Ker}(\overline{g})}{\overline{f}\left(\frac{A}{Z(A)}\right)} \overset{i}{\hookrightarrow} \frac{\text{Ker}(S^o g)}{\overline{f}\left(\frac{A}{Z(A)}\right)} \overset{j}{\longrightarrow} \frac{\text{Ker}(S^o g)}{\text{Ker}(\overline{g})} \longrightarrow 0$$

onde i é a função inclusão e $j\left(x + \overline{f}\left(\frac{A}{Z(A)}\right)\right) = x + \text{Ker}(\overline{g})$. Claramente i é injetora e j é sobrejetora. Temos também que $Im(i) = \frac{\text{Ker}(\overline{g})}{\overline{f}\left(\frac{A}{Z(A)}\right)} \subseteq \text{Ker}(j)$. Seja $\overline{x} = x + \overline{f}\left(\frac{A}{Z(A)}\right) \in \frac{\text{Ker}(S^o g)}{\overline{f}\left(\frac{A}{Z(A)}\right)}$ tal que $0 = j(\overline{x}) = x + \text{Ker}(\overline{g})$. Então $x \in \text{Ker}(\overline{g})$, ou seja, $\overline{x} = x + \overline{f}\left(\frac{A}{Z(A)}\right) \in \frac{\text{Ker}(\overline{g})}{\overline{f}\left(\frac{A}{Z(A)}\right)} = Im(i)$. Assim, a sequência acima é exata.

Além disso, os módulos $\frac{\text{Ker}(\overline{g})}{\overline{f}\left(\frac{A}{Z(A)}\right)}$, $\frac{\text{Ker}(S^o g)}{\text{Ker}(\overline{g})}$ são singulares. Usando o Lema 4.2.5, vem que $\frac{\text{Ker}(S^o g)}{\overline{f}\left(\frac{A}{Z(A)}\right)}$ é singular.

Sabemos também que $\frac{S^o B}{\text{Ker}(S^o g)} \simeq S^o g(S^o B) \leq S^o C$. Como $S^o C$ é não singular, segue que $\frac{S^o B}{\text{Ker}(S^o g)}$ é não singular. Também pela afirmação acima $\frac{\text{Ker}(S^o g)}{\overline{f}\left(\frac{A}{Z(A)}\right)}$ é singular, isto é, $\mathcal{P}_{S^o B}\left(\frac{T(A)}{Z(A)}\right) = \text{Ker}(S^o g)$. Pelo Lema 4.2.4 temos $S^o f(S^o A) = \text{Ker}(S^o g)$. Resta verificar que $S^o g(S^o B) = S^o C$.
Como $S^o f$ é injetora, temos que $S^o A \simeq S^o f(S^o A) = \text{Ker}(S^o g)$. Sabemos que $S^o A$ é um R-módulo injetivo, e portanto $\text{Ker}(S^o g)$ é um R-módulo injetivo. Considere então, a sequência $0 \longrightarrow \text{Ker}(S^o g) \xhookrightarrow{i} S^o B \xrightarrow{S^o g} S^o g(S^o B) \longrightarrow 0$ que é exata. Como $\text{Ker}(S^o g)$ é injetivo, segue da Corolário 2.5.3, que a sequência cinde. Seja $\mathcal{T} : S^o g(S^o B) \longrightarrow S^o B$ a cisão de $S^o g$ que é injetora. Então $S^o B = \text{Ker}(S^o g) \oplus \mathcal{T}(S^o g(S^o B)) \simeq \text{Ker}(S^o g) \oplus S^o g(S^o B)$. Do fato de $S^o B$ ser injetivo, concluímos pelo Corolário 2.5.2, que $S^o g(S^o B)$ é injetivo. Da Proposição 2.6.3, segue que, $S^o g(S^o B)$ não tem extensões essenciais próprias. Desde que g é sobrejetora é fácil ver que $\overline{g}$ é sobrejetora. Assim $\overline{g}\left(\frac{B}{Z(B)}\right) = \frac{C}{Z(C)} \leq_e S^o C$. Finalmente, como $\overline{g}\left(\frac{B}{Z(B)}\right) \leq S^o g(S^o B) \leq S^o C$ e $\overline{g}\left(\frac{B}{Z(B)}\right) \leq_e S^o C$ concluímos, usando a Proposição 2.6.1, que $S^o g(S^o B) \leq_e S^o C$. Assim, $S^o g(S^o B) = S^o C$.

$\square$

Note que o teorema apresentado acima é o análogo ao item (b) do Teorema 2.7.1.

4.3 Anéis Quocientes e Propriedades do anel $S^o R$

Nesta seção apresentamos a definição de anel quociente. Para anel R tal que $Z_r(R) = 0$, verificamos que $S^o R$ é um anel quociente para R e que $S^o R$ é anel não singular, auto-injetivo e regular.

Definição 4.3.1. *Um anel quociente à direita para R é um anel Q que contém R como subanel e tal que para todos $x, y \in Q, x \neq 0$, existe $r \in R$ tal que $xr \neq 0$ e $yr \in R$.*

Se Q é um anel quociente à direita para R, então $R_R \leq_e Q_R$. De fato, basta fazer $x = y$ na definição acima.

Analogamente se define anel quociente à esquerda, mas não é verdade em geral que anéis quocientes à direita são anéis quocientes à esquerda, conforme [10] pg.60 .
Exemplos:

1. Note que R é sempre um anel quociente para R.

2. É fácil ver que $\mathbb{Q}$ é um anel quociente à direita para $\mathbb{Z}$.

3. Seja R um domínio de Ore à direita e $D = \{[a, b] \ / \ a, b \in R, b \neq 0\}$ o anel de divisão construído na seção 1.1. Então D é um anel quociente à direita para R.

4. Seja R um anel comutativo e $S^{-1}R$ sua localização segundo o sistema multiplicativo $S = R^*$. Então $S^{-1}R$ é um anel quociente à direita para R.

Note que todo anel quociente clássico à direita para R é um anel quociente à direita para R. De fato, sejam Q um anel quociente clássico à direita para R e $x, y \in Q$, $x \neq 0$. Então, $y = ab^{-1}$ com $a, b \in R$ e b um elemento regular. Assim, $yb = a \in R$ e $xb \neq 0$ pois b é inversível. Portanto Q é um anel quociente à direita para R.

Teorema 4.3.1. *Se $Z_r(R) = 0$ então S^oR é um anel quociente à direita para R.*

Demonstração: Já vimos no Teorema 4.2.1 que R é subanel de S^oR. Sejam $x, y \in S^oR$ com $x \neq 0$ e considere o ideal à direita $J = \{r \in R \ / \ yr \in R\}$. Basta mostrar que $xJ \neq 0$. Como $Z_r(R) = 0$ temos que $R \leq_e S^oR$. Assim para cada R-módulo M tal que $R \leq M \leq S^oR$ temos que $R \leq_e M$ e pelo Lema 4.1.2, $\frac{M}{R}$ é singular. Também vimos na seção 4.1 que S^oR é R-módulo não singular. Assim, segue do Lema 4.2.5 que $\mathrm{Hom}_R\left(\frac{M}{R}, S^oR\right) = 0$. Considere as aplicações $\varphi : yR \longrightarrow \frac{yR+R}{R}$, $\varphi(yr) = \overline{yr}$ e $\psi : yR \longrightarrow \frac{R}{J}$, $\psi(yr) = \overline{r}$. Pode-se provar que φ e ψ são homomorfismos com $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi) = yR \cap R$. Portanto, $\frac{yR+R}{R} \simeq \frac{R}{J}$. Desde que $R \leq YR + R \leq S^oR$ temos que $\mathrm{Hom}_R\left(\frac{yR+R}{R}, S^oR\right) = 0$ e pelo isomorfismo, $\mathrm{Hom}_R\left(\frac{R}{J}, S^oR\right) = 0$. Suponha agora que $xJ = 0$. Desta forma, a aplicação $f : \frac{R}{J} \longrightarrow S^oR$, $f(\overline{r}) = xr$ fica bem definida. Temos então que $f \in \mathrm{Hom}_R\left(\frac{R}{J}, S^oR\right) = 0$, que é impossível pois $f(\overline{1}) = x \neq 0$. Logo $xJ \neq 0$, isto é, existe $r \in R$ tal que $xr \neq 0$ e $yr \in R$.

□

O próximo teorema estabelece para S^oR propriedades análogas àquelas listada no Teorema 2.7.1, itens (d),(e) e (f).

Teorema 4.3.2. *Se* $Z_r(R) = 0$ *então:*

(a) $Z_{S^oR}(S^oR) = 0$ *e* $Z\left(\frac{A}{Z(A)}\right) = 0$ *para todo R-módulo A.*

(b) S^oR *é anel regular.*

(c) S^oR *é anel auto-injetivo.*

Demonstração: Pelo Teorema 4.2.2 temos que S^oR é S^oR-módulo injetivo e não singular, isto é, S^oR é anel auto-injetivo e $Z_{S^oR}(S^oR) = 0$. A igualdade $Z\left(\frac{A}{Z(A)}\right)$ para cada R-módulo A, foi feita na Proposição 4.1.1. Para ver que S^oR é anel regular, tome $a \in S^oR$ e considere o S^oR-epimorfismo $f : S^oR \longrightarrow a(S^oR)$, $f(x) = ax$. Observando que $S^o(S^oR) = S^oR$ temos o S^oR-epimorfismo $S^of : S^oR \longrightarrow S^o(a(S^oR))$ onde $\text{Ker}(S^of) = \text{Ker}(f)$. Assim $a(S^oR) \simeq \frac{S^oR}{\text{Ker}(f)} = \frac{S^oR}{\text{Ker}(S^of)} \simeq S^o(a(S^oR))$. Segue do Teorema 4.2.2 que $a(S^oR)$ é um S^oR-módulo injetivo. Como $0 \longrightarrow a(S^oR) \xhookrightarrow{i} S^oR \xrightarrow{\pi} \frac{S^oR}{a(S^oR)} \longrightarrow 0$ é uma sequência exata de S^oR-módulos, temos que $a(S^oR)$ é um somando direto de S^oR. Seja M o S^oR-submódulo de S^oR tal que $S^oR = a(S^oR) \oplus M$. Segue que existem $x \in S^oR$ e $y \in M$ tais que $1 = ax + y$ e então $a = axa + ya$. Notando que $a - axa \in aS^oR \cap M = 0$ concluímos que $a = axa$.

□

Com a hipótese $Z_r(R) = 0$, verificamos que S^oR é um anel quociente à direita para R que satisfaz os análogos aos itens (a) até (f) do Teorema 2.7.1. Acrescentando outras hipóteses sobre o anel R conseguiremos provar que S^oR é anel quociente clássico à direita para R que satisfaz os análogos aos itens (g), (h) e (i), como veremos no capítulo seguinte.

Para encerrar o capítulo, faremos uma observação sobre o módulo quociente definido no capítulo 3. Lembre que se M é um R-módulo e T é um radical de torção, então $Q(M) = D\left(\frac{M}{T(M)}\right)$ é um R-módulo, chamado módulo quociente de M relativo ao radical de torção T.

Quando $Z_r(R) = 0$ e T é o radical não singular Z, temos que $Q(M) = S^oM$. De fato, pela definição de $Q(M)$ vem que, $Q(M) = D\left(\frac{M}{Z(M)}\right)$ onde $\frac{M}{Z(M)} \leq D\left(\frac{M}{Z(M)}\right) \leq \mathcal{E}\left(\frac{M}{Z(M)}\right)$ e $\frac{D\left(\frac{M}{Z(M)}\right)}{\frac{M}{Z(M)}} = Z\left(\frac{\mathcal{E}\left(\frac{M}{Z(M)}\right)}{\frac{M}{Z(M)}}\right)$. Desde que $\frac{M}{Z(M)} \leq_e \mathcal{E}\left(\frac{M}{Z(M)}\right)$ usamos o Lema 4.1.2 para garantir que $Z\left(\frac{\mathcal{E}\left(\frac{M}{Z(M)}\right)}{\frac{M}{Z(M)}}\right) = \frac{\mathcal{E}\left(\frac{M}{Z(M)}\right)}{\frac{M}{Z(M)}}$. Também como $Z_r(R) = 0$ temos que $\mathcal{E}\left(\frac{M}{Z(M)}\right) = S^oM$. Assim $\frac{D\left(\frac{M}{Z(M)}\right)}{\frac{M}{Z(M)}} = \frac{S^oM}{\frac{M}{Z(M)}}$ e então $Q(M) =$

$D\left(\frac{M}{Z(M)}\right) = S^oM$.

A igualdade $Q(M) = S^oM$ justifica chamar S^oM de módulo quociente. Em particular, fazendo $M = R$ temos $Q(R) = S^oR$.

Pelo Teorema 4.3.1 observamos que $Q(R)$ é um anel quociente clássico à direita para R. Mais do que isso, $Q(R) = S^oR$ é chamado anel quociente à direita maximal para R, pois se L é outro anel quociente à direita para R então a inclusão $R \hookrightarrow Q(R)$ estende-se a um monomorfismo de anéis. De fato, se L é anel quociente à direita para R então pelo lema acima $R \leq_e L$. Pelo Lema 2.6.2, o monomorfismo $R \hookrightarrow Q(R) = S^oR$ estende-se a um monomorfismo de módulos $f : L \longrightarrow Q(R)$. Vamos verificar que f é um homomorfismo de anéis. Dado $a \in L$, definimos $\psi_a : L \longrightarrow Q(R)$ por $\psi_a(b) = f(ab) - f(a)f(b)$. É fácil ver que ψ_a é R-homomorfismo e que $\psi_a(r) = 0 \quad \forall r \in R$. Como $\frac{L}{R}$ é singular pois $R \leq_e L$ e $Q(R) = S^oR$ é não singular, segue da Proposição 4.2.1 que $\psi_a = 0$. Portanto $f(ab) = f(a)f(b)$.

Capítulo 5

Teoremas de Goldie

Neste capítulo encontraremos condições necessárias e suficientes, para que exista um anel quociente clássico à direita para um anel com unidade R, e continuem válidas as propriedades do Teorema 2.7.1. Até agora já provamos que se $Z_r(R) = 0$, então S^oR é um anel quociente à direita para R, não necessariamente um anel quociente clássico, que verifica várias propriedades do Teorema 2.7.1.

Introduziremos a definição de módulo de dimensão finita, e provaremos que R_R ter dimensão finita e $Z_r(R) = 0$ são condições necessárias e suficientes para que S^oR tenha todas as propriedades que desejamos, apesar de não ser anel quociente clássico à direita. Finalmente, apresentamos a definição de anel de Goldie à direita. Verificaremos que S^oR é um anel quociente clássico à direita para R com as propriedades que desejamos se, e somente se, R é um anel de Goldie à direita semi-primo.

5.1 Módulos de Dimensão Finita

Provaremos nesta seção que se $Z_r(R) = 0$ e R_R tem dimensão finita então S^oR é um anel quociente clássico à direita para R que é semi-simples. Além disso S^oR é um R-módulo à esquerda plano e os funtores S^o e $(\_) \otimes_R S^oR$ são equivalentes na categoria Mod-R.

Definição 5.1.1. *Uma família $\mathcal{F}$ de submódulos distintos de um R-módulo A é independente, se $A_o \cap (A_1 + \cdots + A_n) = 0$ para quaisquer módulos distintos $A_o, A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{F}$.*

Definição 5.1.2. *Dizemos que um R-módulo A tem dimensão finita se A não contém famílias independentes infinitas de submódulos não nulos.*

Exemplos:

1. Os módulos artinianos tem dimensão finita.

2. Os módulos noetherianos tem dimensão finita.

3. Q é um $\mathbb{Z}$-módulo de dimensão finita, que não é nem artiniano nem noetheriano. De fato, se $A_{\mathbb{Z}}, B_{\mathbb{Z}} \leq \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ com $A, B \neq 0$ então $A \cap B \neq \{0\}$.

4. Se I é um ideal de um domínio comutativo então I é R-módulo de dimensão finita.

5. Sejam R um anel de divisão, A um D-módulo e $P(A)$ o posto de A. Pode-se provar que A tem dimensão finita se, e somente se, $P(A) < \infty$. Em particular, quando R é corpo, A tem dimensão finita se, e somente se, A é um espaço vetorial de dimensão finita.

Proposição 5.1.1. *(a) Se $B \leq A$ e A tem dimensão finita então B tem dimensão finita.*

(b) Seja $B \leq A$. Se B e $\frac{A}{B}$ têm dimensão finita então A tem dimensão finita.

(c) Se $A_1, \cdots, A_n$ têm dimensão finita então $A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$ tem dimensão finita.

Demonstração: (a) É imediato.
(b) Seja $\{C_1, C_2, \cdots\}$ um conjunto independente infinito de submódulos de A. Afirmamos que existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que $B \cap \bigoplus_{n=k}^{\infty} C_n = 0$. Suponha que não seja assim. Construa uma sequência $\{B_1, B_2, \cdots\}$ de submódulos de B da forma seguinte: chame $n_1 = 0$ e escolha $b_1 \in B \cap \bigoplus_{n=1}^{\infty} C_n$, $b_1 \neq 0$. Como b_1 é uma soma finita em $\bigoplus_{n=1}^{\infty} C_n$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $b_1 \in \bigoplus_{n=1}^{n_2} C_n$. Faça $B_1 = B \cap \bigoplus_{n=1}^{n_2} C_n$ e note que $0 \neq B_1 \leq B$. Pela nossa suposição, $B \cap \bigoplus_{n=n_2+1}^{n_3} C_n \neq 0$, de onde obtemos de forma análoga, $B_2 = B \cap \bigoplus_{n=n_2+1}^{n_3} C_n \neq 0$ para algum $n_3 \in \mathbb{N}$, com $0 \neq B_2 \leq B$. Continuando o processo, temos uma sequência $n_1 < n_2, \cdots$ tal que $B_i = B \cap \bigoplus_{n=n_i+1}^{n_{i+1}} C_n \neq 0$. Como

B_i está contido na soma direta $\bigoplus_{n_i+1}^{n_{i+1}} C_n$ e $\{C_1, \cdots, C_n\}$ é uma família independente, concluímos que $\{B_1, B_2, \cdots\}$ é independente. Mas isso é impossível pois B tem dimensão finita. Portanto $B \cap \bigoplus_{n=k}^{\infty} C_n = 0$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Mas isso garante que $f : \bigoplus_{n=k}^{\infty} C_n \longrightarrow \frac{A}{B}$, dada por $f(x) = \overline{x}$ é um monomorfismo. Como $\frac{A}{B}$ tem dimensão finita, segue que $\bigoplus_{n=k}^{\infty} C_n$ tem dimensão finita. Claramente isso implica que $C_n = 0$ para quase todo n e então A tem dimensão finita.

(c) Provaremos usando indução sobre n. Quando $n = 1$ não há o que fazer. Tomamos como hipótese de indução que $A_1 \oplus \cdots \oplus A_k$ têm dimensão finita quando $A_1, \cdots, A_k$ tem dimensão finita. Considerando $A_1, \cdots, A_{k+1}$ de dimensão finita e $\pi_{k+1} : \bigoplus_{i=1}^{k+1} A_i \longrightarrow A_{k+1}$ que é um epimorfismo com $\mathrm{Ker}(\pi_{k+1}) = A_1 \oplus \cdots \oplus A_k$ temos o isomorfismo $\frac{A_1 \oplus \cdots \oplus A_{k+1}}{A_1 \oplus \cdots \oplus A_k} \simeq A_{k+1}$. O resultado segue agora da hipótese de indução e do item (b).

□

Definição 5.1.3. *Um subconjunto cofinal de $\mathcal{L}(R)$ é um subconjunto $\mathcal{L}'$ tal que cada elemento de $\mathcal{L}(R)$ contém um elemento de $\mathcal{L}'$.*

Teorema 5.1.1. *Se $Z_r(R) = 0$ então são equivalentes:*

i. Os funtores S^o e $(\_) \otimes_R S^o R$ são naturalmente equivalentes.

ii. $S^o R$ é um anel semi-simples.

iii. R_R tem dimensão finita.

iv. $I(S^o R) = S^o R \quad I \in \mathcal{L}(R)$.

v. $\mathcal{L}(R)$ tem um subconjunto cofinal de ideais à direita finitamente gerados.

A equivalência $(ii \Leftrightarrow iii)$ foi estabelecida por Gabriel em [14], enquanto as equivalências $(i), (iii), (iv), (v)$ foram estabelecidas por Walker-Walker em [4] .

Note que por enquanto usamos apenas as equivalências $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)$ do teorema acima. As demais serão usadas posteriormente.

Nosso objetivo agora é mostrar que $Z_r(R) = 0$ e R_R de dimensão finita implica que $S^o R$ é R-módulo à esquerda plano.

Definição 5.1.4. *Um módulo que possui um submódulo essencial finitamente gerado é chamado essencialmente finitamente gerado.*

Definição 5.1.5. *Um módulo A é dito essencialmente finitamente relacionado quando existe uma sequência exata curta $0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow A \longrightarrow 0$ tal que F é finitamente gerado e livre e K é essencialmente finitamente gerado.*

Exemplos:

1. Se A é finitamente gerado então A é essencialmente finitamente gerado.

2. $\mathbb{Q}$ é $\mathbb{Z}$-módulo essencialmente finitamente gerado que não é finitamente gerado.

3. Se I é um ideal do domínio comutativo R então I é R-módulo essencialmente finitamente gerado.

4. Pelo exemplo anterior, vemos que se R é um domínio comutativo e I é ideal de R então $\frac{R}{I}$ é essencialmente finitamente relacionado, pois a sequência $0 \longrightarrow I \longrightarrow R \longrightarrow \frac{R}{I} \longrightarrow 0$ é exata.

Note que se A é um R-módulo essencialmente finitamente relacionado então A é finitamente gerado. De fato, A é imagem epimórfica de um R-módulo finitamente gerado.

O próximo lema relaciona dimensão finita com módulos essencialmente finitamente gerados.

Lema 5.1.1. *Um R-módulo A tem dimensão finita se, e somente se, todos os submódulos de A são essencialmente finitamente gerados.*

Demonstração: ($\Rightarrow$)Seja $B \leq A$. Se $B = 0$ é claro que B é essencialmente finitamente gerado. Assuma $B \neq 0$ e considere $\mathcal{F} = \{F \;/\; F$ é família independente de submódulos cíclicos não nulos de $B\}$. Note que $\mathcal{F} \neq \emptyset$, pois existe $x \in B$, $x \neq 0$ e então $0 \neq xR \subseteq B$. Assim $\{xR\} \subseteq B$ e portanto $\{xR\} \in \mathcal{F}$. Dados $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, escreva $F_1 \subseteq F_2$ quando todo módulo de F_1 é um módulo de F_2. É fácil ver que isso define uma relação de ordem em $\mathcal{F}$. Dada uma cadeia $\{F_\alpha\}_{\alpha \in L}$ em $\mathcal{F}$, considere $F = \bigcup_{\alpha \in L} F_\alpha$ que é uma nova família de submódulos cíclicos não nulos de B. Claro que F é uma cota superior para $\{F_\alpha\}_{\alpha \in L}$. Para assegurar que $F \in \mathcal{F}$, precisamos mostrar que a família F é independente. Sejam então $A_o, A_1, \cdots, A_n \in F$. Como $F = \bigcup_{\alpha \in L} F_\alpha$ e $\{F_\alpha\}_{\alpha \in L}$ é uma cadeia , existe $\alpha_o \in L$ tal que $A_o, A_1, \cdots, A_n \in F_{\alpha_o}$. Desde que F_{α_o}

é família independente temos que $A_o \cap (A_1 + \cdots + A_n) = \{0\}$. Segue do Lema de Zorn que $\mathcal{F}$ possui um elemento maximal $\{C_i\}_{i\in I}$. Afirmamos que $\oplus C_i \leq_e B$. De fato, se não fosse essencial, existiria um elemento $b \in B$, $b \neq 0$, tal que $bR \cap \oplus C_i = (0)$. Desta forma, $\{C_i\}_{i\in I} \cup \{bR\}$ seria uma família independente de submódulos cíclicos não nulos de B, que contém $\{C_i\}_{i\in I}$ propriamente. Isso contradiz a maximalidade de $\{C_i\}_{i\in I}$ e portanto $\oplus C_i \leq_e B$. Como A tem dimensão finita segue que a família $\{C_i\}_{i\in I}$ é finita. Desde que cada C_i é cíclico, vemos que $\oplus C_i$ é finitamente gerado. Logo A é essencialmente finitamente gerado.

($\Leftarrow$) Suponha que A não tem dimensão finita. Então existe uma família independente infinita $\{A_i\}_{i\in I}$ de submódulos não nulos de A. Considere o submódulo $\oplus A_i$, que por hipótese deve ter um submódulo essencial M que é finitamente gerado. Se $M = x_1R + \cdots + x_nR$, então existem $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in I$ tais que $M \leq A_{\alpha_1} + \cdots + A_{\alpha_n}$. Seja $\alpha \notin \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$. Como a família $\{A_i\}_{i\in I}$ é independente, vem que $A_\alpha \cap (A_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus A_{\alpha_n}) = 0$ e então $M \cap A_\alpha = 0$. Como $M \leq_e \oplus A_i$ e $A_\alpha \leq \oplus A_i$ concluímos que $A_\alpha = 0$. Isso é uma contradição pois a família $\{A_i\}_{i\in I}$ só tem submódulos não nulos. Portanto A tem dimensão finita.

$\square$

Desenvolveremos alguns resultados, com a intenção de provar que se $Z_r(R) = 0$ e todo ideal à direita finitamente gerado de R é essencialmente finitamente relacionado, então S^oR é um R-módulo à esquerda plano.

Seja R um anel não singular. Sabemos que R é subanel de S^oR, e então S^oR é um R,R-bimódulo. Como vimos no Teorema 2.3.2, $A \otimes_R S^oR$ é um R-módulo à direita.

É fácil ver que a aplicação $f' : A \times S^oR \longrightarrow S^oR$ dada por $f'(a,x) = \overline{a}x$, onde $\overline{a} \in \frac{A}{Z(A)} \leq S^oA$ é R-tensorial. Note que f' está bem definida pois S^oA é um S^oR-módulo à direita. Pela definição do produto tensorial, existe um único $\mathbb{Z}$-homomorfismo $f : A \otimes S^oR \longrightarrow S^oA$ tal que $f \circ \mathcal{T} = f'$, onde $\mathcal{T} : A \times S^oR \longrightarrow S^oR$ e $\mathcal{T}(a,x) = a \otimes x$. Desde que f está bem definida e é um $\mathbb{Z}$-homomorfismo temos que $f(\sum a_i \otimes x_i) = \sum f \circ \mathcal{T}(a_i, x_i) = \sum f'(a_i, x_i) = \sum \overline{a_i}x_i$. É imediato verificar que f é um R-homomorfismo.

Com a notação acima temos:

Lema 5.1.2. *Seja $Z_r(R) = 0$. Para cada R-módulo A, nós temos uma sequência exata natural de R-módulos à direita*

$$0 \longrightarrow Z(A \otimes_R S^oR) \xhookrightarrow{i} (A \otimes_R S^oR) \xrightarrow{f} S^oA\,.$$

Demonstração: Como Z é um radical e f é um R-homomorfismo, temos que $f(Z(A \otimes_R S^oR)) \leq Z(S^oA)$. Mas $Z(S^oA) = 0$ como vimos na seção 2.4. Assim $Z(A \otimes_R S^oR) \leq \mathrm{Ker}(f)$. Para provar a outra inclusão, tome $\gamma = a_1 \otimes x_1 + \ldots + a_n \otimes x_n \in \mathrm{Ker}(f)$. Então $\overline{a_1}x_1 + \ldots + \overline{a_n}x_n = 0$. Tome os R-homomorfismos

$$\begin{aligned} f_i : \ & R \longrightarrow S^oR \\ & r \longmapsto x_i r \end{aligned},$$

para $i = 1, \ldots, n$. Como $R \leq_e S^oR$, temos que $f_i^{-1}(R) = \{r \in R \ / \ x_i r \in R\} \leq_e R$ para $i = 1, \ldots, n$. Seja $J = \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(R) \leq_e R$. Então, $x_i J \leq R \quad \forall i = 1, \ldots, n$ e $J \in \mathcal{L}(R)$. Notemos que $\overline{a_1(x_1 r) + a_2(x_2 r) + \ldots + a_n(x_n r)} = \overline{a_1}x_1 r + \ldots + \overline{a_n}x_n r = (\overline{a_1}x_1 \ldots + \overline{a_n}x_n) r = 0$ para todo $r \in J$. Portanto, $u_r = a_1(x_1 r) + \ldots + a_n(x_n r) \in Z(A)$ para todo $r \in J$. Assim, $u_r I_r = 0$ para algum $I_r \leq_e R$. Note que para todo $\lambda \in I_r$, $(\gamma)\lambda = (u_r \otimes 1)\lambda = u_r \otimes \lambda = u_r\lambda \otimes 1 = 0 \otimes 1 = 0$. Portanto, $\gamma r \in Z(A \otimes_R S^oR) \quad \forall r \in J$, isto é, $\gamma J \leq Z(A \otimes_R S^oR)$. Note que

$$\begin{aligned} \psi : \ & R \longrightarrow \tfrac{A \otimes S^oR}{Z(A \otimes S^oR)} \\ & r \longmapsto \overline{\gamma r} \end{aligned}$$

coincide com a função nula em J, $\frac{R}{J}$ é singular e $\frac{A \otimes S^oR}{Z(A \otimes S^oR)}$ é não singular. Então, pela Proposição 4.2.1, $\overline{0} = \psi(R) = \overline{\gamma R}$, ou seja, $\gamma R \subseteq Z(A \otimes S^oR)$. Assim, $\gamma \in Z(A \otimes S^oR)$.

□

Lema 5.1.3. *Sejam $Z_r(R) = 0$ e C um R-módulo à direita não singular. Se C tem um submódulo essencial finitamente gerado então $S^oC = C(S^oR)$ e S^oC é um S^oR-módulo finitamente gerado.*

Demonstração: Seja A um R-submódulo de C tal que $A \leq_e C$ e A finitamente gerado. Assim $A_R \leq_e C_R \leq_e (S^oC)_R$, pois C é não singular. Como $A(S^oR) \leq (S^oC)(S^oR) \subseteq S^oC$ temos que $A(S^oR) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \ / \ a_i \in A, x_i \in S^oR, n \in \mathbb{N} \right\}$ é um R-submódulo de S^oC. Além disso, dado $x \in S^oC$, $x \neq 0$, existe $0 \neq r \in R$ tal que $0 \neq xr \in A \subset A(S^oR)$, ou seja, $A(S^oR) \leq_e S^oC$. Por outro lado, como A é finitamente gerado temos que $A(S^oR)$ é um S^oR-submódulo de S^oC finitamente gerado. Seja $\{x_1, \cdots, x_n\} \subseteq S^oR$ conjunto de geradores de $A(S^oR)$, isto é, $A(S^oR) =$

$x_1S^oR + x_2S^oR + \ldots + x_nS^oR$. Tome $F = \underbrace{S^oR \oplus S^oR \oplus \cdots \oplus S^oR}_{\text{n-vezes}}$, que é um S^oR-módulo livre e finitamente gerado, e considere o S^oR-epimorfismo

$$\begin{aligned} f: \quad & F \longrightarrow A(S^oR) \\ & \sum \alpha_i \longmapsto \sum x_i\alpha_i \end{aligned}.$$

Como $(S^oR)_R$ é não singular e $F \simeq \prod_{i=1}^{n} A_i$, com $A_i = S^oR \quad \forall i = 1 \ldots n$, temos que F é R-módulo não singular. De forma análoga, concluímos que F é R-módulo injetivo. Assim $S^oF = \mathcal{E}\left(\frac{F}{Z_R(F)}\right) = \mathcal{E}(F) = F$. Mas vimos que o funtor S^o é exato, e portanto, $S^of : S^oF = F \longrightarrow S^o(A(S^oR))$ é um epimorfismo. Daí, $\frac{F}{\mathrm{Ker}(S^of)} \simeq S^o(A(S^oR))$. Já que $(A(S^oR))_{S^oR} \leq (S^oC)_{S^oR}$, podemos considerar $(A(S^oR))_R \leq (S^oC)_R$. Assim, $A(S^oR)$ é um R-módulo não singular. Note que $\overline{f} : \frac{F}{Z(F)} \longrightarrow \frac{A(S^oR)}{Z(A(S^oR))}$ se reduz a $f : F \longrightarrow A(S^oR)$, pois $Z(F) = Z(A(S^oR)) = 0$. Por outro lado, S^of é a única extensão de $\overline{f} = f$ à $S^oF = F$. Logo, $S^of = \overline{f} = f$, o que implica que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(S^of)$. Então $A(S^oR) = S^o(A(S^oR))$, isto é, $\frac{S^o(A(S^oR))}{A(S^oR)} = 0$. Desta forma, $S^o(A(S^oR)) = \mathcal{P}_{S^oC}(A(S^oR))$. De forma análoga a demonstração da Proposição 4.2.4, temos $0 = \frac{S^o(A(S^oR)))}{A(S^oR)} = Z\left(\frac{S^oC}{A(S^oR)}\right)$, ou seja, $\frac{S^oC}{A(S^oR)}$ é não singular. Portanto, $\frac{S^oC}{A(S^oR)} = Z\left(\frac{S^oC}{A(S^oR)}\right) = 0$. Segue então, que S^oC é S^oR-módulo finitamente gerado e $S^oC = C(S^oR)$.

□

Proposição 5.1.2. *Seja R um anel tal que $Z_r(R) = 0$ e R_R tem dimensão finita. Se I é um ideal à direita de R e I é essencialmente finitamente relacionado então $Z(I \otimes_R S^oR) = 0$.*

Demonstração: Por hipótese, existe uma sequência exata de R-módulos da forma $0 \longrightarrow K \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} I \longrightarrow 0$ com K essencialmente finitamente gerado e F livre e finitamente gerado. Podemos escrever $F = R^n$. Pela Proposição 2.3.3 temos a sequência exata de $\mathbb{Z}$-módulos,

$$K \otimes S^oR \xrightarrow{\alpha\otimes 1} R^n \otimes S^oR \xrightarrow{\beta\otimes 1} I \otimes S^oR \longrightarrow 0 .$$

Desde que S^oR é um R,R-bimódulo, a sequência acima é sequência exata de R-módulos. Vimos também que S^o é um funtor exato em Mod-R, o que produz uma nova sequência exata de R-módulos da forma

$$0 \longrightarrow S^oK \xrightarrow{S^o\alpha} S^oR^n \xrightarrow{S^o\beta} S^oI \longrightarrow 0 .$$

Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd} & K \otimes S^oR \arrow[r, "\alpha \otimes 1"] \arrow[d, "f"'] & R^n \otimes S^oR \arrow[r, "\beta \otimes 1"] \arrow[d, "g"'] & I \otimes S^oR \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & S^oK \arrow[r, "S^o\alpha"] & S^oR^n \arrow[r, "S^o\beta"] & S^oI \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

onde f, g e h são os R-homomorfismos que definimos no Lema 5.1.2. Temos então $\text{Ker}(f) = Z(K \otimes S^oR)$, $\text{Ker}(g) = Z(R^n \otimes S^oR)$ e $\text{Ker}(h) = Z(I \otimes S^oR)$. Por definição, $S^o\alpha$ é o único S^oR-homomorfismo que estende $\overline{\alpha} : \frac{K}{Z(K)} \longrightarrow \frac{R^n}{Z(R^n)}$, $\overline{\alpha}(\overline{x}) = \overline{\overline{\alpha(x)}}$. Com isso, é fácil ver que o diagrama acima comuta. Para provar que $Z(I \otimes_R S^oR) = 0$, basta provar que h é injetora.

Afirmação 1. Se f é sobrejetora e g é injetora então h é injetora.

De fato, dado $u \in \text{Ker}(h)$ temos que $u = \beta \otimes 1(v)$ para algum $v \in R^n \otimes S^oR$. Agora como o diagrama é comutativo, temos que $S^o\beta(g(v)) = h(\beta \otimes 1(v)) = h(u) = 0$. Assim $g(v) \in \text{Ker}(S^o\beta) = Im(S^o\alpha)$, isto é, $g(v) = S^o\alpha(w)$ para $w \in S^oK$. A sobrejetividade de f assegura que existe $z \in K \otimes S^oR$ tal que $f(z) = w$. Como $g(\alpha \otimes 1(z)) = S^o\alpha(f(z)) = S^o\alpha(w) = g(v)$ e g é injetora, temos $\alpha \otimes 1(z) = v$. Finalmente, $u = \beta \otimes 1(v) = \beta \otimes 1(z)) = 0$ pois $\text{Ker}(\beta \otimes 1) = Im(\alpha \otimes 1)$.

Vamos provar inicialmente que g é injetora. Não é difícil provar que $\varphi : R \otimes S^oR \longrightarrow S^oR$, $\varphi(r \otimes x) = rx$ é um R-isomorfismo com inverso $\varphi^{-1} : S^oR \longrightarrow R \otimes S^oR$ dado por $\varphi^{-1}(r) = 1 \otimes r$. Como S^oR é um R-módulo não singular, concluímos pelo isomorfismo que $Z(R \otimes_R S^oR) = 0$. Como $F = R^n$ e os módulos não singulares são fechados por produto direto, usamos propriedades de produto tensorial para ver que $Z(F \otimes_R S^oR) = Z(R^n \otimes S^oR) = Z((R \otimes S^oR)^n) = 0$. Isso mostra que g é injetora. Falta provar que f é sobrejetora. Note que $Z(K) = 0$ pois $K \simeq \alpha(K) \leq F = R^n$ e R^n é não singular. Assim $K = \frac{K}{Z(K)}$, isto é, $\overline{k} = k$ para todo $k \in K$. Como $f(\sum k_i \otimes x_i) = \sum \overline{k_i} x_i = \sum k_i x_i \in K(S^oR)$ temos que $f : K \otimes S^oR \longrightarrow K(S^oR)$ é sobrejetora. Mas como K é essencialmente finitamente gerado e não singular, temos do lema anterior que $S^oK = K(S^oR)$ e portanto $f : K \otimes S^oR \longrightarrow S^oK$ é sobrejetora.

□

Na próxima proposição, apresentamos uma caracterização de módulos planos, cuja demonstração pode ser vista em [1], pg.35.

Proposição 5.1.3. *Um R-módulo à esquerda A é plano se, e somente se, para cada ideal à direita finitamente gerado I de A a aplicação $f : I \otimes_R A \longrightarrow A$, $f(\sum x_i \otimes a) = \sum x_i a$ é um R-monomorfismo.*

Teorema 5.1.2. *Se $Z_r(R) = 0$ e todo ideal à direita finitamente gerado de R é essencialmente finitamente relacionado, então S^oR é um R-módulo à esquerda plano.*

Demonstração: Seja I um ideal à direita finitamente gerado de R e considere o $\mathbb{Z}$-homomorfismo natural $\varphi : I \otimes_R S^oR \longrightarrow S^oR$, $\varphi(\sum a_i \otimes x_i) = \sum a_i x_i$. Como $Z_r(R) = 0$ e $I \leq R_R$ temos que I é um R-módulo não singular. Também, por hipótese, I é essencialmente finitamente relacionado. Agora usando a Proposição 5.1.2, concluímos que $Z(I \otimes_R S^oR) = 0$. Pelo Lema 5.1.2 vem que a aplicação $f : I \otimes_R S^oR \longrightarrow S^oI$, dada por $f(\sum a_i x_i) = \sum \overline{a_i} x_i$ é injetora pois $\mathrm{Ker}(f) = Z(I \otimes_R S^oR) = 0$. Desde que I é não singular, segue que $\overline{a_i} = a_i$ e então $\varphi(I \otimes_R S^oR) = f(I \otimes_R S^oR)$. Logo $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(f) = 0$ e φ é injetora. Usando agora a Proposição 5.1.3, temos que S^oR é S^oR-módulo à esquerda plano.

□

O próximo teorema junto com o Teorema 5.1.1 mostra que $Z_r(R) = 0$ e R_R ter dimensão finita, é condição necessária e suficiente para que S^oR seja um anel quociente à direita para R, que satisfaz propriedades análogas às do Teorema 2.7.1.

Teorema 5.1.3. *Se $Z_r(R) = 0$ e R_R tem dimensão finita então S^oR é um R-módulo à esquerda plano.*

Demonstração: Seja I um ideal à direita finitamente gerado de R. Pelo Teorema 5.1.2, basta mostrar que I é essencialmente finitamente relacionado. Considere $I = x_1R + \cdots + x_nR$. A partir do R-homomorfismo $\varphi : R^n \longrightarrow I$ dado por $\varphi(r_1, \cdots, r_n) = x_1 r + \cdots + x_n r$, formamos a sequência exata $0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi) \xhookrightarrow{i} R^n \xrightarrow{\varphi} I \longrightarrow 0$. Pela Proposição 5.1.1 (c) vemos que R^n tem dimensão finita e então pelo Lema 5.1.1, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ é essencialmente finitamente gerado. Como R^n é livre e finitamente gerado, segue que I é essencialmente finitamente relacionado.

□

5.2 Módulos Uniformes

Desejamos obter condições sobre R de forma que S^oR seja um anel quociente clássico à direita para R, e continuem valendo as propriedades vistas até o momento.

Nesta seção, estudaremos o caso em que R é um domínio. O caso geral será abordado na próxima seção.

Note que se R é domínio então a condição $Z_r(R) = 0$ é satisfeita. Veremos que R_R ter dimensão finita já garante que S^oR seja anel quociente clássico à direita para R e além disso, S^oR é um anel de divisão.

Quando R é domínio, veremos que a condição R_R ser de dimensão finita pode ser mais precisa, em termos de número de elementos numa família independente de ideais não nulos. Para isso introduziremos a definição de módulos uniformes.

Definição 5.2.1. *Seja A um R-módulo não nulo. Dizemos A é uniforme quando quaisquer dois submódulos não nulos de A tem intersecção não nula.*

Exemplos:

1. $\mathbb{Q}$ é $\mathbb{Z}$-módulo uniforme.

2. Todo ideal não nulo de um domínio comutativo R é um R-módulo uniforme.

Observações:

1. Um submódulo não nulo de um módulo uniforme é uniforme e qualquer extensão essencial de um módulo uniforme é uniforme.

2. Todo módulo uniforme tem dimensão finita.

3. Um módulo A é uniforme se, e somente se, $A \neq 0$ e cada submódulo não nulo de A é essencial em A.

4. Seja A um módulo uniforme. É fácil ver que A só possui famílias independentes de submódulos não nulos, com um elemento.

Na próxima proposição relacionamos os domínios de Ore com os módulos uniformes.

Proposição 5.2.1. *Seja R um domínio. São equivalentes:*

i. R é domínio de Ore à direita.

ii. R_R é módulo uniforme.

Demonstração: ($i \Rightarrow ii$) Sejam A e B submódulos não nulos de R. Assim existem $a \in A$ e $b \in B$, $b \neq 0$. Como R é domínio de Ore à direita, temos que $aR \cap bR \neq 0$. Segue que $A \cap B \neq 0$ e portanto R_R é uniforme.
($ii \Rightarrow i$) Sejam a e b elementos não nulos de R. Então $0 \neq aR \leq R$ e $0 \neq bR \leq R$. Como R é uniforme temos que $aR \cap bR \neq 0$. Logo R é domínio de Ore à direita.

□

Veremos no próximo teorema, que as condições da proposição acima, são necessárias e suficientes para que S^oR seja o anel quociente clássico à direita para R. Antes disso demonstraremos um lema.

Lema 5.2.1. *Seja A um módulo de dimensão finita.*

(a) Os submódulos fechados de A satisfazem a condição das cadeias ascendentes.

(b) Os submódulos fechados de A satisfazem a condição das cadeias descendentes.

(c) Todo submódulo não nulo de A contém um módulo uniforme.

Demonstração: (a) Suponha que o conjunto dos submódulo fechados de A não satisfaz a condição das cadeias ascendentes. Então A possui uma cadeia $A_1 < A_2 < \ldots$ de submódulos fechados tal que para cada n, A_n é um submódulo fechado próprio de A_{n+1}. Assim A_n não é submódulo essencial de A_{n+1}. Portanto, A_{n+1} tem um submódulo não nulo C_n tal que $A_n \cap C_n = 0$. Para todo n temos $(C_1 + \ldots + C_n) \cap C_{n+1} \leq A_{n+1} \cap C_{n+1} = 0$. Desta maneira a família $\{C_1, C_2, \ldots\}$ é independente, o que contradiz a hipótese de A ter dimensão finita.
(b) Suponhamos que (b) não é válido. Então A possui uma cadeia $A_1 > A_2 > \ldots$ de submódulos fechados. Seja B_1 um complemento relativo de A_1 em A. Note que $B_1 \cap A_2 \leq B_1 \cap A_1 = 0$. Assim B_1 pode ser aumentado para um complemento relativo B_2 de A_2. Continuando o processo, obtemos uma cadeia $B_1 \leq B_2 \leq \ldots$ tal que cada B_n é um complemento relativo para A_n em A. De acordo com o Lema 2.6.1, cada B_n é fechado em A. Usando o item (a) temos que $B_n = B_n + 1$ para algum n. Usando a Proposição 2.6.2 temos que $A_{n+1} \oplus B_{n+1} \leq_e A$ e assim $A_{n+1} \oplus B_n \leq_e A$. Mas $A_{n+1} \oplus B_n \leq A_n \oplus B_n$, e então $A_{n+1} \leq_e A_n$. Como A_{n+1} é fechado em A, obtemos que $A_n = A_{n+1}$, o que é uma contradição.
(c) Seja B um submódulo não nulo de A. Afirmamos que B tem um submódulo

fechado não nulo e minimal. De fato, temos que o conjunto $X = \{C \leq B \;/\; C \neq 0$ e C fechado em $B\}$ é não vazio pois $B \in X$. Se B não for minimal para X, existe $B_1 \in X$ tal que $0 \neq B_1 < B$. Se B_1 não for minimal para X, existe $B_2 \in X$ tal que $0 \neq B_2 < B_1$. Seguindo o processo obtemos uma cadeia descendente $B > B_1 > B_2 > \ldots$, formada por submódulos não nulos e fechados em B. Lembramos que B tem dimensão finita pela Proposição 5.1.1. Assim pelo item (b) a cadeia acima é estacionária. Isso garante que existe $K \leq B$, $K \neq 0$, K fechado em B e K minimal com tais propriedades. Suponha que K não é uniforme. Então existem $C, D \leq K$, $C \neq 0$, $D \neq 0$ tais que $C \cap D = 0$. Aumentando D se necessário, podemos assumir que D é um complemento relativo para C em K. Do Lema 2.6.1, segue que, D é fechado em K, o que contradiz a maximalidade de K. Portanto K é o submódulo uniforme procurado.

□

Teorema 5.2.1. *Seja R é um domínio integral. São equivalentes:*

i. *S^oR é um anel de divisão e $S^oR = \{ab^{-1} \;/\; a, b \in R, b \neq 0\}$.*

ii. *R é um domínio de Ore à direita.*

iii. *R_R tem dimensão finita.*

Demonstração: $(ii \Rightarrow iii)$ Pela Proposição 5.2.1 temos que R_R é uniforme, e conseqüentemente R_R tem dimensão finita.
$(iii \Rightarrow ii)$ Se R_R tem dimenão finita, segue do Lema 5.2.1, que todo submódulo não nulo de R_R tem um submódulo uniforme. Em particular, R tem um submódulo I que é uniforme. Desde que $I \neq 0$, existe um elemento não nulo $0 \neq \in I$. Defina o R-homomorfismo $f : R \longrightarrow I$ por $f(r) = ar$. Note que como R é domínio, a função f é injetora. Então $R_R \simeq f(R) \leq I$. Sendo I um módulo uniforme, concluímos que R_R é uniforme. Portanto R é um domínio de Ore à direita.
$(i \Rightarrow ii)$ Sejam $x, y \in R$, $x, y \neq 0$. Por hipótese temos $x^{-1}, y \in S^oR$ e então $x^{-1}y \in S^oR$. Assim $x^{-1}y = ab^{-1}$, para $a, b \in R$, $b \neq 0$. Portanto $yb = xa \neq 0$, ou seja, $xR \cap yR \neq 0$. Logo R é domínio de Ore à direita.
$(ii \Rightarrow i)$ Pela Proposição 5.2.1 temos que R_R é uniforme. Como R é domínio, sabemos que $Z_r(R) = 0$ e então $R_R \leq_e (S^oR)_R$. Já observamos que as extensões essenciais de módulos uniformes são uniformes. Assim S^oR é R-módulo uniforme e daí, S^oR é S^oR-módulo uniforme. Seja $C \leq (S^oR)_{(S^oR)}$, $C \neq 0$. Como S^oR é S^oR-módulo uniforme, vem que $C \leq_e S^oR$ e pelo Lema 4.1.2 temos que $\frac{S^oR}{C}$ é S^oR-módulo singular. Assim $\frac{S^oR}{C}$ é um S^oR-módulo singular apenas quando $C = 0$ ou $C = S^oR$.

Afirmação 1. S^oR é S^oR-módulo simples.

Sejam $0 \neq C \leq S^oR$ e $0 \neq x \in C$. Então, $x(S^oR) \leq C$, e daí, $x(S^oR) \leq S^oR$. Considere o S^oR-epimorfismo $f : S^oR \longrightarrow x(S^oR)$ dado por $f(a) = xa$. Note que $S^o(S^oR) = S^oR$ e como S^o é funtor exato temos que $S^of : S^oR \longrightarrow S^o(x(S^oR))$ é um S^oR-epimorfismo. Daí $\frac{S^oR}{\mathrm{Ker}(S^of)} \simeq S^o(x(S^oR))$. Lembre que S^of é a única extensão de $\overline{f} : \frac{S^oR}{Z(S^oR)} \longrightarrow \frac{x(S^oR)}{Z(x(S^oR))}$. Observe também que $x(S^oR)$ é R-módulo não singular pois $(x(S^oR)) \leq (S^oR)$. Portanto $f : S^oR \longrightarrow x(S^oR)$ e conseqüentemente $S^of = \overline{f} = f$. Assim $x(S^oR) = S^o(x(S^oR))$. Logo $0 = \frac{S^o(x(S^oR))}{x(S^oR)} = Z\left(\frac{S^oR}{x(S^oR)}\right)$. Como vimos acima, isso assegura que $x(S^oR) = S^oR$. Mas $x \in C$ e então $x(S^oR) \leq C \leq S^oR$ implicando em $C = S^oR$. Portanto S^oR é um S^oR-módulo simples.

Afirmação 2. S^oR é anel de divisão.

Tome $a \in S^oR$, $a \neq 0$. Assim temos $(0) \neq a(S^oR) \leq (S^oR)_{(S^oR)}$ e a simplicidade de S^oR garante que $a(S^oR) = S^oR$. Assim existe $x \in S^oR$ tal que $ax = 1$. Analogamente, já que $x \neq 0$, obtemos $y \in S^oR$ tal que $xy = 1$. Porém $a = a.1 = a(xy) = (ax)y = 1.y = y$. Assim $ax = 1 = xa$.

Afirmação 3. $S^oR = \{ab^{-1} \ / \ a, b \in R, b \in R^*\}$.

Como $Z_r(R) = 0$, temos que R é subanel de S^oR. Assim, pela afirmação anterior, todo elemento não nulo de R tem inverso em S^oR. Portanto obtemos a inclusão $\{ab^{-1} \ / \ a, b \in R, b \in R^*\} \subseteq S^oR$. Tome agora $x \in S^oR$. Se $x \in R$, escreva $x = x.1^{-1}$. Se $x \notin R$ então $x \neq 0$. Como $R \leq_e S^oR$, existe $b \in R$ tal que $0 \neq xb \in R$. Claro que $b \neq 0$ e então existe $b^{-1} \in S^oR$. Escreva $x = (xb)b^{-1}$ com $xb \in R$, $b \in R^*$. Isso garante que $S^oR = \{ab^{-1} \ / \ a, b \in R, b \in R^*\}$.

□

Observe que no caso em que R é um domínio, a primeira condição do teorema acima assegura que S^oR é um anel quociente clássico à direita para R. Por outro lado, a terceira condição, assegura que valem todas as propriedades listadas no Teorema 2.7.1.

5.3 Teoremas de Goldie

Na seção 5.1 vimos que se R é um anel tal que $Z_r(R) = 0$ e R_R tem dimensão finita, então S^oR é um anel quociente à direita para R e valem propriedades análogas àquelas do Teorema 2.7.1. Na seção 5.2, mostramos que quando R é um domínio tal que R_R tem dimensão finita, então valem as propriedades que desejamos e S^oR é um anel de divisão que é anel quociente clássico à direita para R. Estudaremos agora o caso em que R não é necessariamente um domínio. Desejamos obter condições necessárias e suficientes, impostas sobre o anel R, de forma que o anel quociente à direita S^oR seja anel quociente clássico à direita e mantenha as propriedades vistas na seção 5.1.

Revendo as equivalências do Teorema 5.1.1, podemos estabelecer nosso objetivo. A saber, obter condições sobre R de forma que:

(a) $Z_r(R) = 0$.

(b) S^oR seja anel semi-simples.

(c) $S^oR = \{ab^{-1} \ / \ a \in R, b \in R^*\}$.

O próximo lema reduz nosso trabalho à examinar a existência de um anel quociente clássico à direita semi-simples para o anel não singular R.

Lema 5.3.1. *Seja $Z_r(R) = 0$. São equivalentes:*

i. S^oR é semi-simples e $S^oR = \{ab^{-1} \ / \ a \in R, b \in R^*\}$.

ii. R possui anel quociente clássico à direita semi-simples.

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii)$ Como $Z_r(R) = 0$ temos pelo Teorema 4.2.1 que R é subanel de S^oR. Assim a igualdade $S^oR = \{ab^{-1} \ / \ a \in R, b \in R^*\}$ diz que S^oR é um anel quociente clássico à direita para R.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Seja Q um anel quociente clássico à direita e semi-simples de R. Então, $R \subseteq Q$ como subanel e $R_R \leq_e Q_R$. Pelo Teorema 4.3.2 S^oR é R-módulo injetivo, assim segue do Lema 2.6.2 que a inclusão $i : R \longrightarrow S^oR$ se estende a um R-monomorfismo $f : Q \longrightarrow S^oR$. Afirmamos que f é monomorfismo de anéis. Claro que $f(1) = 1$ pois f estende a inclusão. Dado $x \in Q$, defina $g_x : Q \longrightarrow S^oR$ por $g_x(y) = f(xy) - f(x)f(y) = f(x)y - f(x)f(1)y = 0$. Desde que $R_R \leq_e Q_R$, sabemos pelo Lema 4.1.2 que $\frac{Q}{R}$ é singular. Também S^oR é não singular e g_x coincide com a função nula em R. Segue da Proposição 4.2.1 que $g_x = 0$ e portanto f é um monomorfismo de anéis. Pelo isomorfismo $Q \simeq f(Q) \leq S^oR$ concluímos que S^oR é um Q-módulo. Como $R \leq Q \leq S^oR$ e $R \leq_e S^oR$ vem da Proposição 2.6.1 que $Q_R \leq_e (S^oR)_R$ o que implica $Q_Q \leq_e (S^oR)_Q$. Como Q_Q é semi-simples, temos que

Q_Q é injetivo pelo Teorema 2.6.2. Mas então $Q = S^oR$ pela Proposição 2.6.3. A igualdade $S^oR = \{ab^{-1} \ / \ a \in R, b \in R^*\}$ segue imediatamente do fato de Q ser anel quociente clássico à direita para R.

□

Note que na demonstração acima, verificamos que se um anel não singular R tem anel quociente à direita semi-simples então este anel é S^oR.

O lema acima dá uma condição necessária e suficiente sobre R para que S^oR seja formado por frações de R e continuem válidas as propridades dadas no Teorema 5.1.1. Assim, nosso objetivo a partir desse momento é obter condições sobre R de forma que R possua anel quociente clássico à direita semi-simples.

Mostraremos no final da seção, que os teoremas de Goldie nos fornecem condições para que exista um anel quociente clássico semi-simples para um anel com unidade R. Antes porém, introduziremos alguns conceitos e desenvolveremos alguns resultados que nos possibilitarão demonstrar esses teoremas.

Definição 5.3.1. *O anulador à direita (à esquerda) de um subconjunto X de um anel R é o conjunto dos elementos $r \in R$ tal que $xr = 0$ $(rx = 0)$ para todo $x \in X$.*

Dado $x \in R$, chamaremos de anulador à direita do elemento x ao conjunto $r(x) = \{r \in R \ / \ xr = 0\}$. Similarmente, denota-se $r(X) = \{r \in R \ / \ xr = 0 \ \ \forall x \in X\}$ para o anulador à direita de um subconjunto $X \subseteq R$. Note que o anulador à direita de $X \subseteq R$ é um ideal à direita de R.

Definição 5.3.2. *Um ideal anulador à direita (à esquerda) de um anel R é um ideal à direita (à esquerda) que é igual ao anulador à direita (à esquerda) de algum subconjunto de R.*

Definição 5.3.3. *Um anel de Goldie à direita é um anel R tal que R_R tem dimensão finita e tal que o conjunto dos ideais anuladores à direita satisfaz a condição das cadeias ascendentes.*

Exemplos:

1. Todo anel noetheriano à direita é um anel de Goldie à direita.

2. Note também que todo domínio R satisfaz a condição das cadeias ascendentes para o conjunto de ideais anuladores à direita, visto que os únicos ideais anuladores à direita são 0 e R. Assim, no caso em que R é domínio, R é anel

de Goldie à direita se, e somente se, R_R tem dimensão finita. Mas pelo Teorema 5.2.1, isso acontece se, e somente se, R é domínio de Ore à direita. Portanto, no caso de domínio, ser anel de Goldie é equivalente a ser domínio de Ore.

Dado um R-módulo A, escreveremos $L^*(A) = \{B \leq A \ / \ Z\left(\frac{A}{B}\right) = 0\}$.

Lema 5.3.2. *Seja R um anel tal que $Z_r(R) = 0$ e R_R tem dimensão finita. Então:*

(a) $L^*(R)$ satisfaz a condição das cadeias ascendentes.

(b) $L^*(R)$ satisfaz a condição das cadeias descendentes.

Demonstração: Vamos verificar que com as hipóteses acima, $L^*(R)$ é o conjunto dos submódulos fechados de R, e daí os itens (a) e (b) seguem do Lema 5.2.1. Sejam $A \leq R$ tal que $Z\left(\frac{R}{A}\right) = 0$ e B um módulo com $A \leq_e B \leq R$. Então $\frac{B}{A} \leq Z\left(\frac{R}{A}\right) = 0$, ou seja, $B = A$. Por outro lado, seja A um submódulo fechado de R. Como na demonstração da Proposição 4.2.4 temos que $\frac{\mathcal{P}_R(A)}{A} = Z\left(\frac{R}{A}\right)$. Seja x um elemento não nulo de $\mathcal{P}_R(A)$. Note que $\frac{\mathcal{P}_R(A)}{A}$ é singular, pois $Z\left(\frac{\mathcal{P}_R(A)}{A}\right) = Z\left(Z\left(\frac{R}{A}\right)\right) = Z\left(\frac{R}{A}\right) = \frac{\mathcal{P}_R(A)}{A}$. Então existe $I \in \mathcal{L}(R)$ tal que $\overline{x}I = 0$. Desta forma $xI \leq A$. Como R é não singular temos $xI \neq 0$. Portanto $xR \cap A \neq 0$, ou seja, $A \leq_e \mathcal{P}_R(A)$. Como A é submódulo fechado de R temos $\mathcal{P}_R(A) = A$, ou seja, $Z\left(\frac{R}{A}\right) = 0$. Assim $A \in L^*(R)$. Portanto $L^*(R)$ é igual ao conjunto dos submódulos fechados de R.

□

Proposição 5.3.1. *Se R satisfaz a condição das cadeias ascendentes para anuladores à direita então o ideal $Z_r(R)$ é nilpotente.*

Demonstração: Seja $J = Z_r(R)$ e vamos supor que J não é nilpotente. Mostraremos que $r(J^k) < r(J^{k+1})$ para cada inteiro positivo k. Como $J^{k+1} \neq 0$, vem que $X = \{x \in J \ / \ J^k x \neq 0\}$ é não vazio. Por hipótese, existe $x_o \in X$ tal que $r(x_o)$ é maximal no conjunto $\{r(x) \ / \ x \in X\}$. Dado $a \in J = Z_r(R)$, existe $I \leq_e R$ tal que $aI = 0$. Portanto, $I \leq r(a) \leq R$, ou seja, $r(a) \leq_e R$. Desta forma, $x_oR \cap r(a) \neq 0$, ou seja, existe $s \in R$ tal que $x_os \neq 0$ e $x_os \in r(a)$. Assim, $x_os \neq 0$ e $ax_os = 0$. Notemos que se $r \in r(x_o)$ então $r \in r(ax_o)$. Além disso, $s \in r(ax_o)$ e $s \notin r(x_o)$, ou seja, $r(x_o) < r(ax_o)$. Pela maximalidade de $r(x_o)$, vem que, $ax_o \notin X$. Como $ax_o \in J$ então $J^k ax_o = 0$. Mas como isso é válido para todo $a \in J$, vem que $J^{k+1}x_o = 0$, ou seja, $x_o \in r(J^{k+1})$. Por outro lado, $J^k x_o \neq 0$, pois $x_o \in X$. Assim $x_o \in r(J^{k+1})$ e $x_o \notin r(J^k)$. Dado $r \in r(J^k)$ então $r \in r(J^{k+1})$. Logo, $r(J^k) < r(J^{k+1})$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Mas isto contradiz a hipótese que R satisfaz a condição das cadeias ascendentes para anuladores à direita.

□

Definição 5.3.4. *Um ideal semi-primo de um anel R é um ideal bilateral I tal que se $a \in R$ e $aRa \subseteq I$ então $a \in I$. Um anel semi-primo é um anel o qual (0) é um ideal semi-primo.*

Definição 5.3.5. *Um ideal primo de um anel R é um ideal bilateral I tal que se $a, b \in R$ e $aRb \subseteq I$ então $a \in I$ ou $b \in I$. Um anel é primo quando 0 é um ideal primo.*

Corolário 5.3.1. *Seja R um anel semi-primo. Então R é um anel de Goldie se, e somente se, $Z_r(R) = 0$ e R_R tem dimensão finita.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Se R é anel de Goldie à direita, então R_R tem dimensão finita e R satisfaz a condição das cadeias ascendentes para ideais anuladores à direita de R. Usando a Proposição 5.3.1, temos que $Z_r(R)$ é ideal nilpotente de R. Como R é anel semi-primo temos que 0 é ideal semi-primo. Assim, $R = \frac{R}{0}$ não tem ideais à direita nilpotentes não nulos. Portanto, $Z_r(R) = 0$.
$(\Leftarrow)$ Assumimos que $Z_r(R) = 0$ e R_R tem dimensão finita e vamos mostrar que o ideal anulador $r(X)$ pertence a $L^*(R_R)$. Seja $\overline{a} \in Z\left(\frac{R}{r(X)}\right)$, sendo $X \subseteq R$. Então, $\overline{a} = a + r(X)$, $a \in R$ e existe $I \leq_e R$ tal que $\overline{a}I = \overline{0}$. Mas, $\overline{a}I = aI + r(X)$. Assim, $aI \leq r(X)$. Desta forma, $XaI = 0$, ou seja, $Xa \subseteq Z_r(R) = 0$. Portanto $a \in r(X)$, ou seja, $\overline{a} = \overline{0}$. Logo $r(X) \in L^*(R_R)$. Mas $L^*(R_R)$ satisfaz a condição das cadeias ascendentes, conforme Lema 5.3.2 e então, toda cadeia ascendente de ideais anuladores à direita de R é estacionária.

□

Dado um módulo A de dimensão finita, pode-se verificar que A possui um submódulo essencial o qual é soma direta finita de submódulos uniformes. Mais do que isso, se $A_1 \oplus \ldots \oplus A_n \leq_e A$ com cada A_i sendo um módulo uniforme então qualquer família independente de submódulos não nulos de A tem no máximo n elementos. Assim, dado um módulo A de dimensão finita existe um número natural n tal que A tem uma família independente de n submódulos não nulos e não possui família independente com mais de n submódulos não nulos. Este número natural n é chamado de dimensão de Goldie e denotamos $n = dim(A)$.

Lema 5.3.3. *Seja $B \leq A$ tal que B tem dimensão finita. Então $dim(A) = dim(B)$ se, e somente se, $B \leq_e A$.*

Demonstração: Seja $B_1 \oplus \ldots \oplus B_n \leq_e B$, onde B_i é uniforme para cada i e $n = dim(B)$. Se $B \leq_e A$, então $B_1 \oplus \ldots B_n \leq_e A$, e assim, $dim(A) = n$. Por outro lado, se B não é submódulo essencial de A, então A tem um submódulo não nulo M tal que $M \cap B = 0$. Nesse caso, $\{B_1, \ldots, B_n, M\}$ é uma família independente de $n+1$ submódulos não nulos de A. Portanto, $dim(A) > n$.

□

O lema a seguir será utilizado na demonstração do próximo teorema bem como nas demonstrações dos teoremas de Goldie.

Lema 5.3.4. *Seja $Z_r(R) = 0$, e assuma que R_R tem dimensão finita. Para cada $x \in R$, são equivalentes:*

i. x é regular em R.

ii. $xR \in \mathcal{L}(R)$.

iii. x é inversível em S^oR.

Demonstração: $(iii \Rightarrow i)$ É óbvio.
$(i \Rightarrow ii)$ Note que se x é regular em R então $r(x) = 0$. Para $n = 1, 2, \ldots$, seja $K_n = \mathcal{P}_R(x^nR)$. Como $xR \supseteq x^2R \supseteq \ldots$, temos que $K_1 \geq K_2 \geq \ldots$ em $L^*(R_R)$. Mas $L^*(R_R)$ satisfaz condição das cadeias descendentes conforme Lema 5.3.2. Assim, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $K_n = K_{n_o} \quad \forall n \geq n_o$. Note que $\frac{\mathcal{P}_R(x^{n_o+1}R)}{x^{n_o+1}R}$ é singular conforme Proposição 4.2.4. Além disso, $\mathcal{P}_R(x^{n_o+1}R)$ é não singular pois R é não singular. Procedendo de maneira análoga a feita na demonstração do Lema 5.3.2, obtemos que $x^{n_o+1}R \leq_e K_{n_o+1} = K_{n_o}$ Como $x^{n_o+1}R \leq x^{n_o}R \leq K_{n_o}$, vem que, $x^{n_o+1}R \leq_e x^{n_o}R$. Por outro lado, $r(x) = 0$, e então, $r(x^{n_o}) = 0$. Defina $\varphi : R_R \longrightarrow x^{n_o}R$, $\varphi(r) = x^{n_o}r$. É fácil verificar que φ é um R-isomorfismo. Note que $\varphi(xR) = x^{n_o+1}R$. Portanto, $xR = \varphi^{-1}(x^{n_o+1}R) \leq_e R$.
$(ii \Rightarrow iii)$ Do Teorema 5.1.1 temos que $(xR)S^oR = S^oR$, pois $xR \in \mathcal{L}(R)$. Assim, $x(S^oR) = S^oR$ e então, x é inversível à direita em S^oR. Considere $\psi : {}_{(S^oR)}(S^oR) \longrightarrow (S^oR)x$, $\psi(q) = qx$. É fácil verificar que ψ é um S^oR-epimorfismo. A invertibilidade à direita de x garante a injetividade de ψ. Portanto, ${}_{(S^oR)}(S^oR) \simeq (S^oR)x$, ou seja, $dim({}_{(S^oR)}(S^oR)) = dim({}_{(S^oR)}((S^oR)x))$. Do Teorema 5.1.1, temos também que S^oR é um anel semi-simples. Usando o Teorema 2.6.2, vem que ${}_{(S^oR)}(S^oR)$ é noetheriano à esquerda. Portanto, $(S^oR)x$ é um S^oR-módulo à esquerda que tem dimensão finita. De acordo com o Lema 5.3.3, $(S^oR)x \leq_e {}_{(S^oR)}(S^oR)$. Como ${}_{(S^oR)}(S^oR)$ é semi-simples

e usando o Lema 2.6.3 temos que $(S^oR)x = S^oR$, ou seja x, é inversível à esquerda em S^oR.

$\square$

Teorema 5.3.1. *Sejam R um anel de Goldie à direita semi-primo e I um ideal à direita de R. Então $I \in \mathcal{L}(R)$ se, e somente se, I contém um elemento regular de R.*

Demonstração: De acordo com o Corolário 5.3.1, $Z_r(R) = 0$ e R_R tem dimensão finita, pois R é anel de Goldie à direita semi-primo. Pelo Lema 5.3.4, se $x \in I$ e x é regular então $xR \in \mathcal{L}(R)$. Assim $xR \leq I \leq R$ e $xR \leq_e R$, ou seja, $I \leq_e R$.
Por outro lado, assuma que $I \in \mathcal{L}(R)$. Como na demonstração do Corolário 5.3.1, temos que o ideal anulador à direita $r(x)$ pertence a $L^*(R_R)$ para qualquer $X \subset R$. Mas $L^*(R_R)$ satisfaz a condição das cadeias descendentes pois $Z_r(R) = 0$ e R_R tem dimensão finita. Então existe $x \in I$ tal que $r(x)$ o elemento minimal do conjunto de anuladores à direita de elementos de I. Vamos mostrar que $xR \in \mathcal{L}(R)$. Como $I \leq_e R$, isto segue se mostrarmos que $xR \leq_e I$. Seja $M \leq I$ tal que $M \cap xR = 0$. Dado $m \in M$ temos $mR \cap xR = 0$, pois $M \cap xR = 0$. Se $s \in r(m + x)$ então $(m + x)s = 0$, ou seja, $ms = -xs$. Assim $ms = xs = 0$ e consqüentemente $s \in r(m) \cap r(x) \leq r(x)$. Mas como $(m + x) \in I$, segue da minimalidade de $r(x)$, que $r(m + x) = r(x)$. Então, $r(x) = r(m) \cap r(x) \leq r(m)$, ou seja, $m[r(x)] = 0$. Como isto é válido para todo $m \in M$, vem que, $M[r(x)] = 0$. Tome $y \in [r(x)M]^2$. Então $y = \sum_{i=1}^{n} z_i w_i$ onde $z_i, w_i \in r(x)M \quad \forall i = 1 \dots n$. Portanto, para cada i, $z_i = r_i m_i$ e $w_i = s_i n_i$, $r_i, s_i \in r(x)$ e $m_i, n_i \in M$. Note que $z_i w_i = (r_i m_i)(s_i n_i) = r_i(m_i s_i)n_i = 0$ pois $Mr(x) = 0$. Assim $y = 0$, ou seja, $[r(x)M]^2 = 0$. Do fato que R é um anel semi-primo, segue que $r(x)M = 0$. Vamos verificar por indução que $\{M, xM, x^2M, \dots\}$ é uma família independente de ideais à direita de R. Obviamente, $\{M\}$ é independente. Assuma que $\{M, xM, \dots, x^nM\}$ é independente para algum $n \geq 0$. Usando o fato que $r(x)$ é um ideal à direita de R, temos que $[(M \oplus xM \oplus \dots \oplus x^nM) \cap r(x)]^2 \leq r(x)M + r(x)xM + \dots + r(x)x^nM \leq r(x)M = 0$. Da semi-primalidade de R, obtemos que

$$(M \oplus xM \oplus \dots \oplus x^nM) \cap r(x) = 0 \tag{1}$$

Defina então

$$\begin{aligned} \varphi : \quad M \oplus xM \oplus \dots \oplus x^nM &\longrightarrow xM + \dots + x^{n+1}M \\ \sum_{i=0}^{n} x^i m_i &\longmapsto x\left(\sum_{i=0}^{n} x^i m_i\right) \end{aligned}$$

É fácil verificar que φ é um R-epimorfismo. Além disso, segue diretamente de (1) a injetividade de φ. Assim φ é um isomorfismo. Portanto, $\{xM, x^2M, \ldots, x^{n+1}M\}$ é uma família independente de ideais à direita de R. Mas, $M \cap (xM \oplus \ldots \oplus x^{n+1}M) \leq M \cap xR = 0$. Logo, $\{M, xM, \ldots, x^{n+1}M, \ldots\}$ é independente. Por outro lado, R_R tem dimensão finita, e então, existe $n \geq 0$ tal que $x^nM = 0$. Se $n = 0$ então $M = 0$. Se $n > 0$, então $x^{n-1}M \leq r(x)$ e daí $x^{n-1}M^2 \leq r(x)M = 0$. Continuando, obtemos $M^{n+1} = 0$. Como R é semi-primo vem que, $M = 0$. Concluímos então que $xR \leq_e I \leq_e R$, ou seja, $xR \in \mathcal{L}(R)$. Pelo Lema 5.3.4, x é regular.

□

Com os resultados desenvolvidos até o momento podemos demonstrar os teoremas de Goldie.

Teorema 5.3.2 (Segundo Teorema de Goldie). *O anel S^oR é um anel quociente clássico à direita para R e é também um anel semi-simples se, e somente se, R é um anel de Goldie à direita semi-primo.*

Demonstração: ($\Leftarrow$) Pelo Corolário 5.3.1, temos que R_R tem dimensão finita e $Z_r(R) = 0$. Assim R é subanel de S^oR e $R \leq_e S^oR$. Dado $x \in S^oR$, definimos o R-homomorfismo $f : R \longrightarrow S^oR$, $f(r) = xr$. Pela Proposição 2.6.1, $I = f^{-1}(R) = \{r \in R \mid xr \in R\} \leq_e R$ e $xI \leq R$. Do Teorema 5.3.1 vem que, I possui um elemento regular b. Mais ainda, pelo Lema 5.3.4, existe $b^{-1} \in S^oR$. Tome $a = xb \in R$. Assim $S^oR = \{ab^{-1} \mid a \in R, b \in R^*\}$. Note que usamos novamente o Lema 5.3.4 para garantir que $\{ab^{-1}, a \in R, b \in R^*\}$. Portanto S^oR é um anel quociente clássico à direita para R e S^oR é semi-simples pelo Teorema 5.1.1.
($\Rightarrow$) Como S^oR está definido, temos que $\mathbb{Z}_r(R) = 0$. A hipótese de S^oR ser anel semi-simples nos garante que R_R tem dimensão finita, pelo Teorema 5.1.1.

Afirmação 1. Dados $x_1, \ldots, x_n \in S^oR$, existe um elemento regular $c \in R$ tal que $x_i \in Rc^{-1}$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Vamos provar por indução. Dado $x_1 \in S^oR$, temos que existem $r, c \in R$ tal que $x_1 = rc^{-1}$, c é elemento regular. Supor que $x_i = b_ic^{-1}$ para $i = 1, \ldots, n-1$, onde $b_1, \ldots, b_{n-1}, c \in R$, e c é regular. Como $x_n \in S^oR$, existem $t, u \in R$ tal que $x_n = tu^{-1}$, u é elemento regular. Temos $c^{-1}, u \in S^oR$, e daí $c^{-1}u \in S^oR$. Então existem $d, e \in R$ tal que $c^{-1}u = de^{-1}$, e é elemento regular. Então, $ue = cd$. Mas u, e são regulares em R, e então, ue é regular em R. Assim, $1 = (cd)(ue)^{-1}$. Portanto, $b_ic^{-1} = (b_id)(ue)^{-1}$, ou seja, $x_i = (b_id)(ue)^{-1}$ para

$i = 1, \ldots, n-1$. Além disso, $x_n = tu^{-1} = (te)(ue)^{-1}$. Desta forma, ue é um elemento regular que satisfaz a condição desejada.

Dado qualquer $I \in \mathcal{L}(R)$ nós temos, pelo Teorema 5.1.1 $I(S^oR) = S^oR$. Assim, $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 1$, com $a_i \in I$ e $x_i \in S^oR$. De acordo com a afirmação acima, $x_i = b_ic^{-1}$, sendo $b_i, c \in R \quad \forall i = 1, \ldots, n$, c um elemento regular. Conseqüentemente, $c = a_1x_1c + a_2x_2c + \ldots + a_nx_nc = a_1b_1 + \ldots + a_nb_n \in I$. Então, pelo Lema 5.3.4, $cR \leq I$ e $cR \in \mathcal{L}(R)$. Assim, cada elemento de $\mathcal{L}(R)$ contém um elemento de $\mathcal{L}(R)$ que é principal. Desta forma, $\mathcal{L}(R)$ tem um subconjunto cofinal de ideais à direita principais. Usando novamente o Teorema 5.1.1, concluímos que R_R tem dimensão finita. Do Corolário 5.3.1, basta mostrar que R é semi-primo. Vamos supor que R não é semi-primo, ou seja, que existe um ideal não nulo I tal que $I^2 = 0$. De acordo com a Proposição 2.6.2, escolhemos um ideal à direita J tal que $I \oplus J \leq_e R$. Note que, $JI \leq J \cap I = 0$. Assim, $(I \oplus J)I = 0$. Como $I \oplus J \in \mathcal{L}(R)$, pelo Lema 5.3.4, existe um elemento de $\mathcal{L}(R)$ da forma xR tal que $xR \leq I \oplus J$, com x regular. Portanto, $xRI = xI \leq (I \oplus J)I = 0$. Logo $I = 0$, o que é impossível.

$\square$

Note que de acordo com o teorema acima, o anel R ser um anel de Goldie à direita semi-primo, é uma condição necessária e suficiente para que S^oR tenha todas as propriedades que desejamos. De fato, além de S^oR ser um anel quociente clássico à direita para R, temos pelo Corolário 5.3.1 que $Z_r(R) = 0$ e R_R tem dimensão finita. Então as demais propriedades, seguem do Teorema 5.1.1, do Teorema 5.1.3 e dos resultados do capítulo 4.

Listamos abaixo um resumo das propriedades obtidas, indicando os resultados que justificam cada uma delas.

(a) S^oR é um anel quociente clássico à direita para R - Teorema 5.3.2

(b) S^o : Mod-$R \longrightarrow$ Mod-R é um funtor exato - Teorema 4.2.4

(c) Se A é um R-módulo à direita (à esquerda) então $S^oA = \mathcal{E}\left(\frac{A}{T(A)}\right)$ - Definição 4.1.3

(d) $Z(S^oR) = 0$ e $Z\left(\frac{A}{Z(A)}\right) = 0$ para todo R-módulo A - Teorema 4.3.2

(e) S^oR é anel regular - Teorema 4.3.2

(f) S^oR é anel auto-injetivo - Teorema 4.3.2

(g) S^oR é anel semi-simples - Teorema 5.1.1 ou Teorema 5.3.2

(h) S^oR e $(\_)\otimes_R S^oR$ são funtores equivalentes na categoria Mod-R - Teorema 5.1.1

(i) S^oR é um R-módulo plano - Teorema 5.1.3

Para finalizar, demonstraremos o primeiro teorema de Goldie, que assegura que quando R é anel de Goldie à direita primo, então S^oR é um anel quociente clássico à direita para R e ainda S^oR é um anel artiniano simples. Ressaltamos que os anéis artinianos simples são destacados pelo Teorema de Wedderburn-Artin, como sendo anéis de matrizes sobre anéis de divisão. Veja [10] pg.29 ou [7] pg.91.

Corolário 5.3.2 (Primeiro Teorema de Goldie). *O anel S^oR é um anel quociente clássico à direita para R e S^oR é também um anel artiniano simples se, e somente se, R é um anel de Goldie à direita primo.*

Demonstração: ($\Leftarrow$) Se R é um anel de Goldie à direita primo, então pelo Teorema 5.3.2 S^oR é um anel quociente clássico à direita para R e S^oR é anel semi-simples. Usando o Teorema 2.6.2 temos que S^oR é artiniano. Suponha que S^oR não é simples. Então existe um ideal bilateral I de Q tal que $0 \neq I \neq S^oR$. Assim, $0 \neq I \leq (S^oR)_{(S^oR)}$ e $0 \neq I \leq_{(S^oR)} (S^oR)$, ou seja, $0 \neq I \leq (S^oR)_R$ e $0 \neq I \leq_R (S^oR)$. Seja J o complemento relativo de I em $(S^oR)_{(S^oR)}$. Pela Proposição 2.6.2, $I \oplus J \leq_e (S^oR)_{(S^oR)}$. Se $J = 0$ então $I \leq_e (S^oR)_{(S^oR)}$, o que contradiz o fato de S^oR ser semi-simples. Portanto temos $J \neq 0$, $J \leq (S^oR)_R$, $I \leq (S^oR)_R$ e $R_R \leq_e (S^oR)_R$. Logo, $R \cap J \neq 0$ e $R \cap I \neq 0$. Seja $u \in (R \cap J)(R \cap I)$, ou seja, $u = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$, $a_i \in R \cap J$, $b_i \in R \cap I$. Note que $a_i b_i \in I \cap J$. Desta forma, $a_i b_i = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$, pois $I \cap J = 0$. Desta forma $u = 0$. Conseqüentemente, $(R \cap J)(R \cap I) = 0$. Como R é primo, $R \cap J = 0$ ou $R \cap I = 0$, o que é uma contradição. Portanto, S^oR é simples.
($\Rightarrow$) Do Teorema 5.3.2, vem que R é no mínimo um anel de Goldie à direita semi-primo. Suponha que R não é primo, ou seja, que existem A, B ideais de R não nulos com $AB = 0$. Mas, $(S^oR)A(S^oR)$ é um ideal não nulo do anel simples S^oR. Então, $(S^oR)A(S^oR) = S^oR$. Conseqüentemente, $x_1 a_1 y_1 + \ldots + x_n a_n y_n = 1$, $x_i, y_i \in S^oR$ e $a_i \in A \quad \forall i = 1, \ldots, n$. Além disso, $R_R \leq_e (S^oR)_R$ e $\varphi_i : R \longrightarrow S^oR$ dada por $\varphi(r) = y_i r$ é um homomorfismo de R-módulos. Usando a Proposição 2.6.1, vem que, $I_i = \{r \in R \ / \ y_i r \in R\} = \varphi^{-1}(R) \leq_e R_R$. Tome $I = \bigcap_{i=1}^{n} I_i \leq_e R$. Temos então, $y_i I \leq y_i I_i \leq R_R \quad \forall i = 1, \ldots, n$. Do Teorema 5.3.1, temos que existe um

elemento regular $c \in I$ tal que $y_i c \in R \quad \forall i = 1, \ldots, n$. Portanto, $c \in (S^o R)A$, e daí, $cB \leq (S^o R)AB = 0$. Da regularidade de c segue que, $B = 0$, o que é uma contradição. Assim, R é um anel primo.

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] Bo Stenström. *Rings of Quotients.* Springer-Verlag - New York, 1975.

[2] Carl Faith. *Rings, Modules, and Categories.* Springer-Verlag - New York, 1973.

[3] Carl Faith. *Ring Theory.* Springer-Verlag - New York, 1976.

[4] C. L. Walker e E. A. Walker. *Quotient categories and rings of quotients* Rocky Mountain J. Math. 2 (1972) 513-555.

[5] Franscisco Cesar Polcino Milies. *Anéis e Módulos.* IME, Universidade de São Paulo - São Paulo, 1972 1976.

[6] Friedrich Kasch. *Modules and Rings.* Academic Press Inc. - London, 1982.

[7] I. Reiner. *Maximal Orders.* Academic Press - London, 1975.

[8] J.-M. Maranda *Injective Structures.* Trans. Amer. Math. Soc. 110 (1964) 98-135.

[9] Joachim Lambek. *Torsion Theories, Additive Semantics, and Rings of Quotients.* Lecture Notes in Mathematics 177, Springer-Verlag - New York, 1975.

[10] K.R.Goodearl. *Ring Theory.* Marcel Dekker, Inc., 1976.

[11] Nathan Jacobson. *Basic Algebra II.* W.H.Freeman and Company - New York, 1985.

[12] N. Bourbaki. *Eléments de Mathématique.* fasc. 27, Algèbre Commutative, Chapters 1,2, Paris 1961.

[13] O. Ore. *Linear equations in non-commutative fields.* Ann. of Math. 32:463-477, 1931.

[14] P. Gabriel. *Des catégories abéliennes* Bull. Soc. Math. France 90 (1962) 323-448.